I. megoldás. Az $x, y, z > 0$ ismeretlenek között nem lehetnek egyenlőek, mert bármely kettő egyenlősége esetén az egyik ismeretlent helyettesítve és kiküszöbölve az egyenletekből ellentmondásra jutunk. Például $x = y$ esetén (1) szerint $x = y = \sqrt{\frac{2}{3}}$, amit (2)-be, illetve (3)-ba helyettesítve z-re két olyan másodfokú egyenletet kapunk, amelyek bal oldala azonos, a jobb oldalon viszont 5, illetve 3 áll.

Így megszorozhatjuk az egyenleteket rendre $(x-y)$-nal, $(y-z)$-vel, $(z-x)$-szel; a két szám köbének különbségére ismert azonosság révén az

$$x^3 - y^3 = 2(x-y),$$
$$y^3 - z^3 = 5(y-z),$$
$$z^3 - x^3 = 3(z-x)$$

egyenletekhez jutunk. Ezeket összeadva és x-et kifejezve:

$$x = 3y - 2z. \tag{4}$$

x értékét az (1)-es egyenletbe helyettesítve: $(3y-2z)^2 + (3y-2z)y + y^2 = 2$, amiből

$$13y^2 - 14yz + 4z^2 = 2. \tag{5}$$

Az (5) egyenlet 5-szöröséből kivonva a (2) egyenlet 2-szeresét és a kapott egyenletet 9-cel osztva $7y^2 - 8zy + 2z^2 = 0$ adódik. Az egyenletet y-ra megoldva:

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{7} z, \tag{6}$$

amit a (4)-es egyenletbe helyettesítve:

$$x_1 = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{7} z \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-2 - 3\sqrt{2}}{7} z, \tag{7}$$

ahol x_2 biztosan negatív, így az x_1 és y_1 értékekkel folytatva az egyenlet megoldását, ezeket behelyettesítjük az (1) egyenletbe, amiből összevonás után: $z^2 = \frac{19 - 3\sqrt{2}}{7}$; mivel z pozitív szám, $z = \sqrt{\frac{19 - 3\sqrt{2}}{7}}$ adódik. A (6) és (7) egyenleteket négyzetre emelve és z^2 értékét behelyettesítve, valamint figyelembe véve, hogy x és y is csak pozitív számok lehetnek, az

$$x = \sqrt{\frac{10 - 6\sqrt{2}}{7}} \quad \text{és} \quad y = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}}$$

megoldásokat kapjuk. A kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

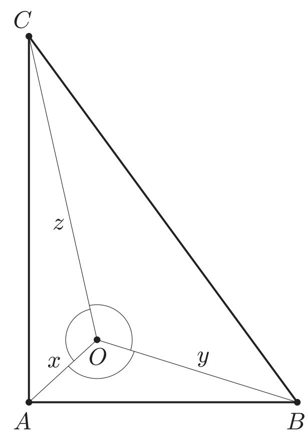
Az x^2, y^2 és z^2 értékének ismeretében az (1), (2) és (3) egyenletek összegét képezve: $2(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx) = 10$, amiből

$$xy + yz + zx = 10 - 2(x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$= 10 - 2 \cdot \frac{10 - 6\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} + 19 - 3\sqrt{2}}{7} = 2\sqrt{2}.$$

Tehát $xy + yz + zx = 2\sqrt{2}$.

II. megoldás. A keresett $xy + yz + xz$ értéket anélkül is megkaphatjuk, hogy megoldanánk az egyenletrendszert. Vegyük észre, hogy az adott egyenletek a koszinusztételre emlékeztetnek. Ebből kiindulva a feladatnak geometriai értelmezést adhatunk.

Tegyük fel, hogy van az egyenletrendszernek pozitív számokból álló megoldása és legyen ez x, y, z. Vegyünk fel a síkban egy O pontot és az A, B, C pontokat úgy, hogy $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $AOB\sphericalangle = BOC\sphericalangle = COA\sphericalangle = 120^\circ$ legyen.



Ekkor az AB, BC, CA szakaszok hossza a koszinusztételből és az egyenletrendszerből meghatározható:

$$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy = 2,$$
$$BC^2 = y^2 + z^2 - 2zy\cos 120^\circ = y^2 + z^2 + yz = 5,$$
$$CA^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos 120^\circ = x^2 + z^2 + xz = 3.$$

Tehát ABC egy $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oldalú háromszög, így Pitagorasz tételének megfordításából adódóan derékszögű.

Számítsuk ki az ABC háromszög területét kétféleképpen: mivel derékszögű, a területe egyrészt a befogói szorzatának a fele, másrészt az AOB, BOC, COA háromszögek területének összege.

$$\frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{xy\sin(120^\circ)}{2} + \frac{yz\sin(120^\circ)}{2} + \frac{zx\sin(120^\circ)}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz),$$

tehát

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz), \quad \text{innen} \quad xy + yz + xz = 2\sqrt{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha van az egyenletrendszernek pozitív számokból álló megoldása, akkor erre $xy+yz+xz = 2\sqrt{2}$.

Meg kell vizsgálnunk még, hogy van-e az egyenletrendszernek pozitív számokból álló megoldása.

Gondolatmenetünk alapján jól látható, hogy a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oldalú derékszögű háromszög izogonális pontját a csúcsokkal összekötő szakaszok hossza megoldása az egyenletrendszernek.