

Megoldás. A szóban forgó három számot jelölje rendre a, b, c . Mivel $bc = pq + qr + rs$, a gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Viète-formulák) alapján p, q, r éppen az $(x-p)(x-q)(x-r) = x^3 - ax^2 + bcx - c$ polinom három gyöke. A feltétel szerint a, b, c egész számok, így bc is az, tehát ez a polinom egész együtthatós. A főegyütthatója 1, ezért minden racionális gyöke egész. Ha ugyanis $x_0 = \frac{u}{v}$ gyöke, ahol u és v relatív prím egész számok, akkor x_0 behelyettesítése után v^3 -nal szorozva: $0 \cdot v^3 = u^3 - au^2v + bcuv^2 - cv^3 = u^3 - v(au^2 - bcuv + cv^2)$. Mivel $(u; v) = 1$, azért u^3 és v is relatív prímek, de az előbbi egyenlőség szerint v osztója u^3 -nak. Ez csak úgy lehetséges, ha $v = \pm 1$, vagyis ha $x_0 = \frac{u}{v}$ egész szám.

Tehát a keresett p, q, r számok olyan pozitív egészek, melyek összege, szorzata és reciprokösszege is egész. Az összeg és a szorzat mindig egész, így azt kell megvizsgálnunk, mikor lesz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ is egész. Legyen $p \leq q \leq r$. Ha $3 \leq p$, akkor

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

így a reciprokösszeg akkor egész, ha egyenlőség teljesül, azaz $p = q = r = 3$. Ha $p = 2$, akkor

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{2}, \quad \text{ezért} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

amiből

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad (q-2)(r-2) = 4,$$

tehát $q = r = 4$, vagy $q = 3, r = 6$. Végül, ha $p = 1$, akkor

$$0 < \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 2, \quad \text{így} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

értéke 1 vagy 2, amiből rendre $q = r = 2$, illetve $q = r = 1$ adódik.

Tehát az összes megfelelő $(p; q; r)$ számhármass – a számok sorrendjére való tekintet nélkül – a következő: $(1; 1; 1)$, $(1; 2; 2)$, $(2; 4; 4)$, $(2; 3; 6)$ és $(3; 3; 3)$.