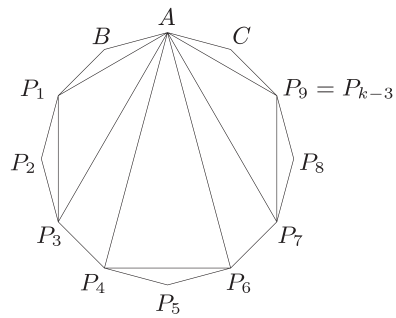
I. megoldás. Ha a csúcsok száma 3, akkor az állítás nyilvánvaló. Egyébként tekintsük az *1. ábrát,* melyen bizonyos átlók be vannak húzva. (Az ábrán $k = 12$, ahol k a csúcsok számát jelöli.)



1. ábra

A szabadon választott A csúcs két szomszédja legyen B és C, a többi csúcsot jelölje P_n. Ez utóbbi csúcsok száma osztható 3-mal.

A-ból minden olyan P_n csúcsba fut él, amelyre n a 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad. Azok a P_n csúcsok, amelyekbe A-ból fut átló, az ábrának megfelelően szintén össze vannak kötve: P_1–P_3, P_4–P_6 stb.

Így B, C és az olyan P_n-ek, melyekre n a 3-mal osztva 2 maradékot ad, pontosan egy háromszögnek a pontjai, ezek rendre ABP_1, ACP_{k-3} és $P_{n-1}P_nP_{n+1}$.

P_1, P_{k-3} és azok a P_n csúcsok, melyekre n a 3-mal osztva 0, illetve 1 maradékot ad, három, vagyis páratlan sok háromszögben vannak benne. Ezek rendre: ABP_1, AP_1P_3, $P_1P_2P_3$; ACP_{k-3}, $AP_{k-3}P_{k-5}$, $P_{k-3}P_{k-4}P_{k-5}$; $AP_{n-2}P_n$, $P_{n-2}P_{n-1}P_n$, AP_nP_{n+1}; $AP_{n-1}P_n$, AP_nP_{n+2}, $P_nP_{n+1}P_{n+2}$.

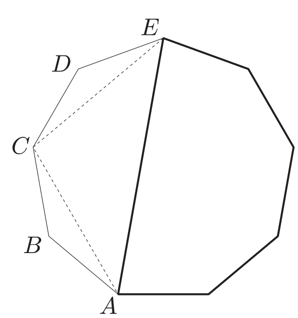
Végül az A csúcs a P_n csúcsok $\frac{2}{3}$ részével van összekötve, így $\frac{2}{3}(k-3)+1 = \frac{2}{3}k-1$ háromszögben van benne. Mivel k osztható 3-mal, $\frac{2}{3}k$ páros, így A is páratlan sok háromszögnek csúcsa.

II. megoldás. A feladatot a teljes indukció módszerével oldjuk meg. Legyen a sokszög csúcsainak száma $3n$.

$n = 1$-re a sokszög háromszög, amire az állítás 0 átló behúzásával teljesül.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Tekintsünk egy $3n+3$ csúcsú sokszöget.

Ennek egy $3n$ csúcsú része a vastag vonallal jelölt sokszög, melyre a feltevés szerint igaz az állítás. (Ezt a részt úgy kaptuk az eredeti sokszögből, hogy levágtunk belőle három szomszédos csúcsot.) Húzzuk be a szaggatott vonallal jelölt átlókat. Ekkor az A és az E csúcsoknál történt változás, és keletkezett három új csúcs.



2. ábra

Az A és E csúcsnál 2-vel több háromszög van, mint eddig, tehát most is páratlan sok háromszögnek a csúcsai.

A B és D csúcsok egy háromszögnek a pontjai.

Végül a C csúcs három háromszögben van benne.

Tehát az állítás $(n+1)$-re is, vagyis minden csúcsa páratlan sok háromszögnek pontja.