I. megoldás. A jól ismert Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség következő általánosítását használjuk fel: Ha $(a_i), (b_i), \ldots, (w_i)$ nemnegatív, n elemű számsorozatok, és a pozitív $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ valós kitevők összege 1, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^{\alpha} {b_i}^{\beta} \ldots {w_i}^{\lambda} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta} \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^{\lambda},$$

és az egyenlőség feltétele az, hogy a megfelelő sorszámú elemek aránya mindegyik sorozatban ugyanaz legyen (l. Skljarszkij–Jaglom–Csencov: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. kötet, 304. feladat). Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget, mégpedig a kövekező módon: Legyen adott két kételemű sorozat, $a_1 = r$, $a_2 = s$, illetve $b_1 = s$, $b_2 = r$; mivel $r+s = 1$, legyen $\alpha = r$ és $\beta = s$. Felírva az egyenlőtlenséget: $r^r s^s + s^r r^s \le (r+s)^r (s+r)^s = 1^{r+s} = 1$, ezzel az állítást igazoltuk. Egyenlőség akkor teljesül, ha $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, azaz $\dfrac{r}{s} = \dfrac{s}{r}$, ami pozitív számokra azt jelenti, hogy $r = s = \dfrac{1}{2}$.

II. megoldás. Pozitív szám valós kitevős hatványát a racionális kitevőjű hatványokra teljesülő monotonitás segítségével, határértékként szokás definiálni. Ezt nem részletezve de felhasználva, az egyenlőtlenséget arra az esetre igazoljuk, amikor az r és s kitevők racionálisak.

Legyen $r = \dfrac{p}{t}$, $s = \dfrac{q}{t}$, ekkor a feltétel miatt $t = (p+q)$, és $p, q, t > 0$. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$r^r \cdot s^s \le r^2 + s^2, \tag{1}$$

$$r^s \cdot s^r \le 2rs. \tag{2}$$

A fenti két egyenlőtlenség összege éppen azt mondja, hogy $r^r \cdot s^s + r^s \cdot s^r$ legfeljebb $r^2 + s^2 + 2rs = (r+s)^2 = 1$.

Az (1) belátásához:

$$r^r \cdot s^s = \left(\frac{p}{t}\right)^{\frac{p}{t}} \cdot \left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{q}{t}} = \sqrt[t]{\frac{p^p}{t^p} \cdot \frac{q^q}{t^q}},$$

Tehát azt kell igazolnunk, hogy

$$\sqrt[p+q]{p^p \cdot q^q} \le (p+q) \cdot \frac{p^2+q^2}{(p+q)^2} = \frac{p^2+q^2}{p+q}.$$

Itt a bal oldal éppen p darab p-nek és q darab q-nak a mértani közepe, míg a jobb oldalon ugyanezen számok számtani közepe áll, így az ezek közti egyenlőtlenség bizonyítja (1)-et.

A (2) belátása is hasonlóan történhet:

$$r^s \cdot s^r = \left(\frac{p}{t}\right)^{\frac{q}{t}} \cdot \left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{p}{t}} = \sqrt[t]{\frac{p^q}{t^q} \cdot \frac{q^p}{t^p}},$$

vagyis a cél

$$\sqrt[p+q]{p^q \cdot q^p} \le (p+q) \cdot \frac{2pq}{(p+q)^2} = \frac{2pq}{p+q}.$$

A bal oldal éppen q darab p-nek és p darab q-nak a mértani közepe, a jobb oldal pedig ugyanezen számok számtani közepe, ezzel (2)-t beláttuk, és vele a feladat állítását is.

Az egyenlőség teljesülésének vizsgálatához csak azt kell meggondolnunk, hogy olyankor (1)-ben és (2)-ben is szükségképpen egyenlőségnek kell lennie; az viszont csak $p = q$ esetén következik be, azaz $r = s = \dfrac{1}{2}$.

III. megoldás. Mivel $1 = r + s = r^{r+s} + s^{r+s} = r^r r^s + s^r s^s$, azért

$$1 - (r^r s^s + r^s s^r) = r^r r^s + s^r s^s - r^r s^s - s^r r^s = (r^r - s^r)(r^s - s^s).$$

Ha $a > 0$, akkor az x^a függvény a pozitív számokon szigorúan monoton nő; így a szorzat mindkét tényezője pozitív, ha $r > s$, negatív, ha $r < s$, míg $r = s$ esetén 0. A szorzat tehát mindig nemnegatív, amiből a feladat állítása leolvasható. Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan az $r = s = \dfrac{1}{2}$ esetben áll fenn.