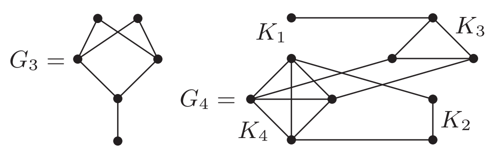
Megoldás. Mivel minden $i \leq n$-re i darab i-edfokú csúcs van, a gráf csúcsainak S fokszám összege $\sum_{i=1}^{n} i^2$; ez nyilván páros, hiszen éppen az élek számának kétszerese. Az i^2 paritása megegyezik az i paritásával, tehát S paritása megegyezik a $\sum_{i=1}^{n} i$ paritásával, ami $\frac{n(n+1)}{2}$, ezért szükséges, hogy az egymáshoz relatív prím n és $n+1$ tényezők valamelyike 4-gyel osztható legyen, vagyis az n szám 4-gyel osztva 0 vagy 3 maradékot adjon. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel egyben elégséges is. A szóbajövő legkisebb $n = 3$, illetve $n = 4$ esetben ilyen gráfot láthatunk a mellékelt *ábrán.* Ezután elegendő megmutatni, hogy ha valamely n-re találtunk egy megfelelő G_n gráfot, akkor n értékét 4-gyel növelve, konstruálni tudunk egy megfelelő G_{n+4} gráfot is. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a G_n gráf mellé felvesszük a K_{n+1}, K_{n+2}, K_{n+3} és K_{n+4} teljes gráfokat rendre $n+1$, $n+2$, $n+3$, illetve $n+4$ csúcson úgy, hogy az öt gráf csúcshalmazai páronként diszjunktak legyenek, majd pedig a K_{n+1} és K_{n+4} gráfok összesen $2n+5$ csúcsát egy-egy új él segítségével összepárosítjuk a K_{n+2} és K_{n+3} gráfok összesen $2n+5$ csúcsával. (Tulajdonképpen már a G_4 gráfot is megkaphatjuk ilyen módon a 0 szögpontú G_0 üres gráfból.) Ezzel a G_n-hez tartozó csúcsok fokszáma nem változik; a K_{n+1}, K_{n+2}, K_{n+3} és K_{n+4} gráfok csúcsainak foka eredetileg rendre n, $n+1$, $n+2$ és $n+3$, a párosítások révén ezek a fokszámok 1-gyel nőnek, tehát az új gráf az $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ fokokra is teljesíti a feladat feltételét, $(n+4)$-nél magasabb fokú pontot pedig nem tartalmaz.



Megjegyzés. A konstrukció szerint $n \geq 7$ esetén G_n két komponensből áll. Felmerül a kérdés, hogy található-e összefüggő konstrukció. A válasz igen.