I. megoldás. Alakítsuk át a vizsgált polinomot.

$$3a^5b - 40a^3b^3 + 48ab^5 = ab(3a^4 - 40a^2b^2 + 48b^4) = ab\big(3(a^2 + 4b^2)^2 - 64a^2b^2\big).$$

Az $a^2 + 4b^2 = 4$ feltételt kihasználva a kifejezés tovább alakítható:

$$ab\big(3(a^2 + 4b^2)^2 - 64a^2b^2\big) = ab(48 - 64a^2b^2).$$

a^2 és $4b^2$ nyilván nemnegatív, így felírható rájuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség:

$$\sqrt{4a^2b^2} \le \frac{a^2 + 4b^2}{2}, \quad \text{amiből} \quad |2ab| \le \frac{4}{2}$$

és így $|ab| \le 1$.

Legyen $ab = x$. Ekkor a kifejezés a $-64x^3 + 48x$ formát ölti. Akkor tudnánk függvényvizsgálatot végezni, ha ez a kifejezés valóban függvény, vagyis ha minden $-1 \le x \le 1$ értékhez találunk olyan a és b számot, amelyekre fennáll, hogy $a^2 + 4b^2 = 4$ és $ab = x$.

Ha $-1 \le ab = x \le 1$, akkor $a \ne 0$ esetén $b = \dfrac{x}{a}$-t behelyettesítve a feltételbe:

$$a^2 + 4 \cdot \frac{x^2}{a^2} = 4, \quad \text{amiből} \quad a^4 - 4a^2 + 4x^2 = 0.$$

Ezt a^2-re megoldva:

$$a^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16x^2}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{1 - x^2}.$$

Ez pontosan akkor nemnegatív, ha $1 - x^2 \ge 0$, vagyis ha $|x| \le 1$. Ekkor tehát van megfelelő a és b. Ha pedig $a = 0$ (ez $x = 0$ mellett jön szóba), akkor $b = 1$ jó.

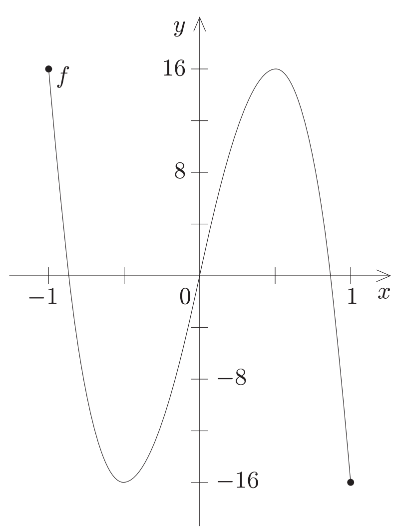
Tehát az

$$f(x) = -64x^3 + 48x = x(-64x^2 + 48)$$

függvényt vizsgáljuk a $[-1; 1]$ intervallumon. A függvény páratlan, zérushelyei

$$x = 0, \quad \text{illetve} \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A függvény deriváltja: $f'(x) = -192x^2 + 48$, ennek zérushelyei $x = \pm\dfrac{1}{2}$. A derivált előjele alapján $x = -\dfrac{1}{2}$ minimum, $x = \dfrac{1}{2}$ maximum. A fentiek alapján a függvény vázlatos képe az *ábrán* látható.



A helyi minimum értéke:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 48 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -16.$$

Meg kell nézni, hogy a vizsgált intervallum szélén, $x = 1$-nél nem kisebb-e a függvényérték: $f(1) = -64 + 48 = -16$. A két érték megegyezik.

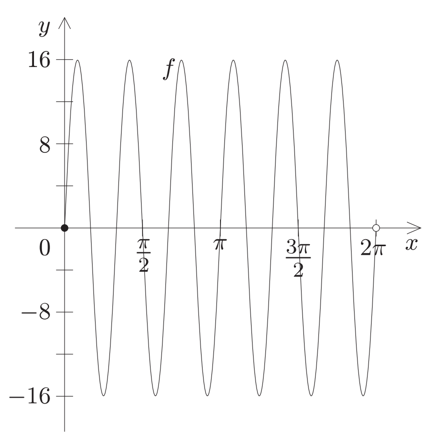
A helyi maximum értéke:
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=16.$$
A vizsgált intervallum szélén: $f(-1)=-64\cdot(-1)+48\cdot(-1)=16$.

Így $-16\le 3a^5b-40a^3b^3+48ab^5\le 16$, és a kifejezés a $[-16;16]$ intervallum minden értékét fölveszi.

II. megoldás. Mivel $a^2+4b^2=4$, így $\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2=1$. Ez azt jelenti, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben az $\left(\frac{a}{2};b\right)$ koordinátájú pont illeszkedik a $(0;0)$ középpontú, egységsugarú körre. Mivel ezen kör bármely pontja megfelelő $x\in\mathbb{R}$ esetén $(\sin x;\cos x)$ koordinátákkal rendelkezik, így bármely feladatbeli $\left(\frac{a}{2};b\right)$ számpárhoz található olyan $x\in[0;2\pi[$, melyre $\frac{a}{2}=\sin x$ és $b=\cos x$. Válasszuk ezt a megfeleltetést. Ekkor $a=2\sin x$ és $b=\cos x$.

Alakítsuk át a feladatbeli kifejezést a következő módon:
$$\begin{aligned}P(a;b):=3a^5b-40a^3b^3+48ab^5&=ab(3a^4-40a^2b^2+48b^4)=\\&=ab\big(3(a^2+4b^2)^2-64a^2b^2\big)=ab(3\cdot4^2-64a^2b^2)=16ab\cdot(3-4a^2b^2).\end{aligned}$$
Az $ab=2\sin x\cos x=\sin 2x$ összefüggést figyelembe véve:
$$\begin{aligned}P(a;b)&=16\sin 2x(3-4\sin^2 2x)=16\sin 2x\big(3(\sin^2 2x+\cos^2 2x)-4\sin^2 2x\big)=\\&=16\sin 2x(2\cos^2 2x+\cos^2 2x-\sin^2 2x)=16\sin 2x(2\cos^2 2x+\cos 4x)=\\&=16(2\sin 2x\cos 2x\cos 2x+\cos 4x\sin 2x)=\\&=16(\sin 4x\cos 2x+\cos 4x\sin 2x)=16\big(\sin(4x+2x)\big)=16\sin 6x.\end{aligned}$$
Azt kaptuk, hogy $3a^5b-40a^3b^3+48ab^5=16\sin 6x$. Mivel $-1\le\sin 6x\le 1$, azért
$$-16\le 3a^5b-40a^3b^3+48ab^5=16\sin 6x\le 16.$$
Mivel $-16\le 16\sin x\le 16$, és $a=2\sin x$, valamint $b=\cos x$, a $P(a;b)$ értéke a $[-16;16]$ intervallum bármely eleme lehet.

Ábrázoljuk az $f(x)=16\sin 6x$ függvényt a $[0;2\pi[$ intervallumon.



Hat olyan x érték van, amelyre a függvény felveszi a maximumát, ezek mindegyikéhez tartozik egy-egy $(a;b)$ értékpár.

A minimális értéket szintén hat helyen veszi föl, minden más értéket pedig tizenkét helyen.

Megjegyzés. 1. Az I. megoldásban $|x|<1$ esetén négy megfelelő a értéket kapunk, így négy $(a;b)$ értékpár tartozik egy x értékhez. Mivel $-16<y<16$ esetén három x-re is teljesül, hogy $f(x)=y$, a vizsgált kifejezés minden $-16<y<16$ számot $3\cdot4=12$ megfelelő $(a;b)$ esetén vesz föl. A minimumot és a maximumot pedig $4+2=6$ esetben, hiszen $x=1$ és $x=-1$ esetén egyaránt két-két megfelelő $(a;b)$ számpár van.

2. A feladat szövegét többféleképpen is lehetett érteni: a „Milyen nagy lehet” kérdést volt, aki úgy értelmezte, hogy csak a kifejezés maximumát kell megkeresni.