

**1. megoldás.** Azt mondjuk, hogy  $K'$  a  $H$  megengedett részhalmaza, ha  $K'$ -nek minden függőleges egyenesen legfeljebb két pontja van (tehát vízszintes egyenesen lehet akár több is), és a  $K'$  pontjait összekötő tengelypárhuzamos szakaszok lefedik  $H$  minden pontját. Létezik megengedett halmaz: ilyen  $K'$ -t alkotnak például  $H$  mindazon pontjai, amelyek a saját függőleges egyenesükön legalsók vagy legfelsők, hiszen ekkor már a  $K'$  pontjai meghatározták a függőleges szakaszok lefedik  $H$  minden pontját.

Legyen  $K$  egy olyan megengedett halmaz, amelyre a  $K$  pontjait összekötő függőleges (esetleg ponttá fajuló) zárt szakaszok által lefedett  $H$ -beli pontok száma minimális. Állítjuk, hogy ez a  $K$  kielégíti a feladat követelményeit. A  $K$  halmaz megengedettsége miatt mindössze azt kell belátnunk, hogy  $K$ -nak minden vízszintes egyenesen legfeljebb két pontja van.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy  $K$  három pontja, mondjuk  $p$ ,  $q$  és  $r$  egy vízszintes egyenesre esnek úgy, hogy a  $q$  a  $p$  és az  $r$  között van. Ha a  $q$  pontot tartalmazó függőleges egyenesen  $K$ -nak nincs más pontja, akkor legyen  $K' = K \setminus \{q\}$ . Ha van, akkor pontosan egy van (mondjuk  $s$ ). Legyen  $q'$  a  $qs$  nyílt félegyenesnek a  $q$  végponthoz legközelebbi  $H$ -beli pontja (ilyen van, mert  $s \in K \subseteq H$ ), és legyen  $K' = K \setminus \{q\} \cup \{q'\}$ . Mindkét esetben  $K' \subseteq H$ ,  $K'$ -nek minden függőleges egyenesen legfeljebb két pontja van, és a  $K'$  pontjait összekötő tengelypárhuzamos szakaszok lefedik  $H \setminus K'$  minden pontját. Ráadásul a  $K'$  pontjait összekötő függőleges (esetleg ponttá fajuló) zárt szakaszok által lefedett  $H$ -beli pontok száma kisebb, mint ugyanez a szám a  $K$  esetén. Ez nem lehetséges.

A kapott ellentmondás igazolja, hogy a  $K$  halmaz a feladatban megfogalmazott mindkét feltételt teljesíti.  $\square$

A fenti érvelés bár igazolja a feladat állítását, nem ad jól használható algoritmust egy megfelelő  $K$  halmaz megtalálására. Az alábbi megoldás ezzel is szolgál.

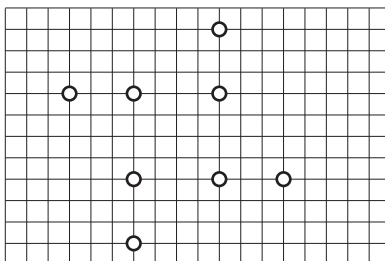
**2. megoldás.** A  $H$  halmaz mérete szerinti indukciónal bizonyítunk. Világos, hogy ha  $|H| = 1$ , akkor  $K = H$  teljesíti a feladatbeli feltételeket. Tegyük fel, hogy legfeljebb  $n$  pontú  $H$  halmazra már igazoltuk az állítást, és legyen a  $H$  halmaznak  $n + 1$  pontja.

Alkossák a  $K^*$  halmazt a  $H$  azon pontjai, amelyek a saját függőleges egyenesükön legalsók vagy legfelsők. Világos, hogy  $K^*$  teljesíti a feladat (b) feltételét. Ha az (a) feltétel is teljesül  $K^*$ -ra, akkor készen vagyunk:  $K = K^*$  megfelelő. Ha azonban az (a) feltétel nem teljesül, akkor ennek az az oka, hogy van  $K^*$ -nak olyan  $q$  pontja, hogy a  $q$  vízszintes egyenesen  $q$ -tól balra és jobbra is van  $K^*$ -nak pontja, mondjuk  $p$  és  $r$ .

Az indukción feltevés szerint az  $n$  pontú  $H \setminus \{q\}$  halmaznak létezik olyan  $K$  részhalmaza, ami minden tengelypárhuzamos egyenesen legfeljebb két pontot tartalmaz, és  $H \setminus \{q\}$  minden pontját lefedik a  $K$  által meghatározott tengelypárhuzamos szakaszok. Állítjuk, hogy ugyanez a  $K$  halmaz  $H$ -hoz is megfelelő. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy  $q$  rajta van egy  $K$ -beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakaszon. Vizsgáljuk a  $p$  pontot! Mivel  $p$  egy függőleges egyenes  $H$ -beli legalsó vagy legfelső pontja, azért vagy  $p \in K$ , vagy  $p$  egy  $K$ -végpontú vízszintes szakaszon található, tehát  $q$  vízszintes egyenesen van  $p$ -tól balra  $K$ -nak pontja. Hasonlóan, ha  $r \notin K$ , akkor  $r$  is csak egy  $K$  meghatározta vízszintes szakaszon lehet, így  $K$ -nak  $r$ -tól jobbra is van pontja. Azt kaptuk, hogy  $q$  csakugyan egy  $K$  végpontú vízszintes szakasz belsejében van, tehát  $K$  valóban megfelel a feladat feltételeinek, vagyis az állítás  $n + 1$  pontú halmazokra is igaz. Ezzel az indukción lépést igazoltuk, a bizonyítást befejeztük.  $\square$

*Megjegyzések.* 1. A 2. megoldásból úgy kaphatunk hatékony algoritmust a  $K$  halmaz keresésére, hogy első lépésben képezzük a  $K^*$  halmazt. Ha  $K^*$  nem alkalmas  $K$ -nak a bizonyításbeli  $q$  pontja miatt, akkor a  $H \setminus \{q\}$  halmazra rekurzívan meghívjuk ugyanezt az algoritmust. Így legfeljebb  $|H| - 1$  alkalommal képezve a megfelelő  $K^*$  halmazt, előbb-utóbb egy keresett  $K$ -t kapunk. (Az is könnyen látható, hogy nem kell egyenként elhagyni a  $q$  pontokat: megtehetjük azt is, hogy  $H$ -ból egyszerre hagyjuk el  $K^*$  összes olyan pontját, ami  $K^*$ -beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakasz belsejében van. Így az algoritmus gyorsabban véget ér.)

2. Több hamis bizonyítás érkezett a feladatra. Legtöbbjük módszeréből az is következne, hogy tetszőleges  $H$  halmazhoz egyértelműen létezik a keresett  $K$ . A *példa* mutatja, hogy ez koránt sincs így.



3. Érdekes tulajdonsága a fenti megoldásokban konstruált  $K$  halmaznak, hogy ha egy  $K'$  halmaz rendelkezik a feladatbeli (a) és (b) tulajdonságokkal, akkor minden  $K'$ -beli végpontokkal rendelkező függőleges szakasz része egy  $K$  meghatározta függőleges szakasznak, továbbá minden  $K$  meghatározta vízszintes szakasz része egy  $K'$ -beli végpontokkal rendelkező vízszintes szakasznak. Más szóval  $K$  a „legmagasabb” és egyben „legkeskenyebb” a kívánt tulajdonságú halmazok között. Természetesen ha a  $90^\circ$ -kal elforgatott ábrán végezzük el a konstrukciót (azaz a függőleges és vízszintes szavakat felcseréljük a bizonyításban), akkor a „legalacsonyabb” és „legszeleesebb” megoldást kapjuk meg.

4. A feladat szoros rokonságot mutat *Gale* és *Shapley* (sajnos nem eléggé) ismert „stabil házassági” tételével.