Megoldás. Jelölje d a szóban forgó számtani sorozat különbségét. Ha d páros, akkor a sorozat csupa páros számból áll. Egy ilyen sorozatra csak úgy lehet igaz a feladatban leírt tulajdonság, ha a sorozatnak legfeljebb 2006 tagja van. Ekkor persze a feladat az üreshalmaz eleméről állít valamit, tehát nincs mit bizonyítanunk.

Az érdekes eset az, amikor d páratlan. Tekintsük a sorozat 2008 egymást követő tagját, legyen ezek halmaza mondjuk $H = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+2007d\}$. Mivel d páratlan, azért a és $a+2007d$ ellentétes paritásúak; jelölje p közülük a páratlant. Ekkor $H \setminus \{p\}$ a vizsgált számtani sorozat 2007 szomszédos tagja, így a feltétel szerint valamelyikük (mondjuk q) relatív prím $H \setminus \{p\}$ minden eleméhez. Állítjuk, hogy q teljesíti a feladat által megkívánt tulajdonságot, azaz q a H halmaz minden eleméhez relatív prím. Ehhez pedig csupán azt kell igazolnunk, hogy p és q relatív prímek.

Világos, hogy q páratlan, hiszen a $H \setminus \{p\}$ sorozatnak van q-tól különböző páros tagja, amihez q relatív prím. Márpedig ha p és q páratlan tagjai egy páratlan különbségű számtani sorozatnak, akkor sorszámuk páros számmal különbözik, így $r := \dfrac{p+q}{2}$ is tagja a számtani sorozatnak. Ráadásul, mivel p a H „szélső” eleme, $r \in H \setminus \{p\}$ is teljesül. Ezért q és r relatív prímek a q választása miatt. Jelölje D a (páratlan) p és q számok legnagyobb közös osztóját. Világos, hogy $D \mid p+q$ és mivel D páratlan, azért $D \mid \dfrac{p+q}{2} = r$ is teljesül. Azt kaptuk, hogy D közös osztója a relatív prím q és r számoknak. Ezt azt jelenti, hogy $D = 1$, tehát p és q is relatív prímek. Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk. $\square$

Megjegyzés. Több dolgozatban szerepel, hogy a feladatban leírt tulajdonságú számtani sorozatok differenciája páratlan. Jóllehet ez az állítás nem igaz, az értékelés során ezt nem tekintettük komoly hibának, hiszen az „elnézett” esetben a feladat állítása az üreshalmaz elemére vonatkozik. Felmerül azonban, hogy páratlan d esetén nincs-e vajon ugyanerről szó. Más szóval: létezik-e egyáltalán olyan legalább 2007 tagú számtani sorozat, ami megfelel a feladat feltételeinek. „Szerencsére” a válasz igen: könnyen belátható, hogy ha d a 2-nél nagyobb és 1004-nél kisebb prímek szorzata, akkor a $2+d, 2+2d, 2+3d, \ldots$ végtelen számtani sorozat bármely 2007 egymást követő tagja közül a középső relatív prím a többi 2006 tag bármelyikéhez.