Megoldás. A játéknak vizsgáljuk azt az általánosabb változatát, amelyben akárhány kupac, és mindegyik kupacban tetszőleges számú kavics lehet. A kavicsok számát jelölje x, a kupacok számát y. Ha egy kupacban csak egyetlen kavics van, azt nevezzük „kis” kupacnak, a többit pedig „nagy” kupacnak, utóbbiak számát jelölje z. Először azt mutatjuk meg, hogy a játék biztosan véget ér, bárhogyan is játszik Anna és Balázs. Mivel $2x \geq x \geq y$, azért $2x - y$ nemnegatív egész szám. Belátjuk, hogy $2x - y$ értéke minden lépés során csökken. Ha a soron következő játékos egy kupacot két kisebb kupacra oszt, akkor x nem változik, y pedig 1-gyel nő, így $2x-y$ értéke valóban csökken. Ha pedig egy kupacból elvesz egyetlen kavicsot, akkor x 1-gyel csökken, y pedig vagy nem változik, vagy 1-gyel csökken, de $2x - y$ értéke mindkét esetben csökken. Mivel $2x - y$ értéke minden lépésben legalább 1-gyel csökken, de végig nemnegatív, a játék véges sok lépésben véget ér.

Azt fogjuk $2x - y$ szerinti teljes indukcióval bizonyítani, hogy pontosan akkor van Balázsnak, vagyis a második játékosnak nyerő stratégiája, ha az x, y, z számok közül vagy mindegyik páros, vagy mindegyik páratlan; egyébként Annának, vagyis az első játékosnak van nyerő stratégiája. Ha $2x - y = 0$, akkor $x = y = z = 0$, vagyis az első játékos nem tud lépni, és így valóban a második játékosnak van nyerő stratégiája.

Tegyük fel, hogy $2x - y = n \geq 1$, és az állítást már minden olyan játékra igazoltuk, ahol $2x - y < n$. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor x, y és z paritása megegyezik. Könnyen meggondolható, hogy bármit is lép az első játékos, a három mennyiség között lesz olyan, amelyik változatlan marad, és lesz olyan is, amelynek értéke pontosan 1-gyel változik, így megváltozik a paritása. Az így keletkező új játékban az indukciós feltevés szerint az első játékosnak van nyerő stratégiája, vagyis az eredeti játékban a másodiknak, ahogyan azt állítottuk.

Tegyük fel végül, hogy x, y és z nem azonos paritásúak. Elegendő azt megmutatni, hogy az első játékos tud úgy lépni, hogy ezután x, y, z paritása megegyező legyen, hiszen ezután alkalmazhatja a folytatásban az új játék második játékosának nyerő stratégiáját. Ha x és y paritása megegyezik (de z paritásával ellentétes), akkor $y \neq z$, tehát van legalább egy kis kupac is. Az első játékos egy kis kupacból elvesz egy kavicsot, így x és y értéke 1-gyel csökken, z pedig nem változik, ezután a három mennyiség paritása megegyezik.

Ha x és z paritása egyezik meg, akkor $x \neq y$, tehát van legalább egy nagy kupac. Ha van olyan nagy kupac is, amelyben legalább 3 kavics van, akkor az első játékos kettéválasztja egy kis és egy nagy kupacra, ekkor y értéke 1-gyel nő, miközben x és z értéke változatlan marad. Ha ilyen nincs, akkor mindegyik nagy kupacban pontosan 2 kavics van. Az első játékos egy nagy – tehát pontosan két kavicsot tartalmazó – kupacból elvesz egy kavicsot, így x és z értéke 1-gyel csökken, miközben y értéke nem változik. Az első játékos mindkét esetben el tudta érni, hogy lépése után a három mennyiség paritása egyezzen meg.

Végül, ha y és z paritása azonos, akkor megint csak van legalább egy nagy kupac. Ha van legalább 3 kavicsot tartalmazó nagy kupac is, akkor az első játékos egy ilyen kupacból elvesz egy kavicsot, így a lépés során y és z nem változik, míg x 1-gyel csökken. Ha viszont minden egyes nagy kupacban pontosan 2 kavics van, akkor az első játékos egy ilyen kupacot két kis kupacra oszt. Így x értéke nem változik, y értéke 1-gyel nő, z értéke pedig 1-gyel csökken. Az első játékos ismét mindkét esetben el tudta érni, hogy lépése után a három mennyiség paritása azonos legyen. Ezzel befejeztük az indukciós lépés igazolását.

Teljes indukcióval beláttuk, hogy ha x, y, z azonos paritásúak, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája, különben pedig az elsőnek. A feladatban szereplő játék esetén $y = 10$, $z = 9$, így az első játékosnak, vagyis Annának van nyerő stratégiája.