I. megoldás. Bármely két parabola hasonló, így az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy a szóban forgó parabola egyenlete $y = x^2$. Ekkor a fókusz koordinátái $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, a v vezéregyenes egyenlete pedig $y = -\frac{1}{4}$. Legyen $P(u; v)$ a parabola tetszőleges külső pontja; ismeretes, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $0 < u^2 - v$.

A P-ből húzott érintők nem párhuzamosak a parabola tengelyével, így kereshetjük őket a P-n átmenő m meredekségű egyenesként, melynek egyenlete $y = m(x-u) + v$. Ez az egyenes akkor és csak akkor érinti a parabolát, ha a görbével egyetlen közös pontja van, tehát az

$$y = x^2,$$
$$y = m(x-u) + v$$

egyenletrendszernek egy megoldása van. Ez pontosan akkor teljesül, ha a behelyettesítéssel kapott $x^2 - mx + mu - v = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa,

$$m^2 - 4um + 4v = 0. \tag{1}$$

Ennek az m-ben másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa $16u^2 - 16v$, ez külső pontra pozitív, az egyenlet két valós gyöke, m_1 és m_2 a P-ből húzható két érintő meredeksége. Ha φ jelöli a két érintő hajlásszögét, akkor a fenti jelölésekkel a $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ kifejtési képlete alapján:

$$|\operatorname{tg}\varphi| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

Mivel $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, így azon P pontok halmazát keressük, amelyekre a fent kiszámolt m_1, m_2 meredekségekkel

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)^2 = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

A gyökök és együtthatók összefüggései szerint az (1) egyenletből $m_1 + m_2 = 4u$ és $m_1 m_2 = 4v$. A (2) feltétel tehát az $(u; v)$ számpárra azt jelenti, hogy

$$(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 = 16u^2 - 16v = \frac{1}{3} \cdot (1 + m_1 m_2)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + 4v)^2. \tag{3}$$

A keresett mértani hely egyenlete az $(u; v)$ változókkal:

$$48(u^2 - v) = (1 + 4v)^2.$$

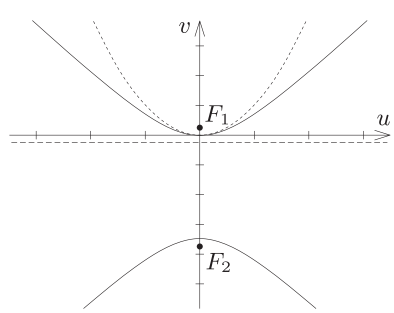
Rendezés és teljes négyzetté alakítás után az egyenlet

$$u^2 - \frac{\left(v + \frac{7}{4}\right)^2}{3} = -1 \tag{4}$$

alakú. Ez egy, a kanonikus helyzethez képest eltolt és 90°-kal elforgatott hiperbola egyenlete (*1. ábra*). A hiperbola valós tengelye az y-tengely, képzetes tengelye az x-tengellyel párhuzamos $y = -\frac{7}{4}$ egyenletű egyenes. A valós féltengely hossza $a = \sqrt{3}$, a képzetes féltengely hossza $b = 1$, így a fókuszoknak a centrumtól mért távolsága

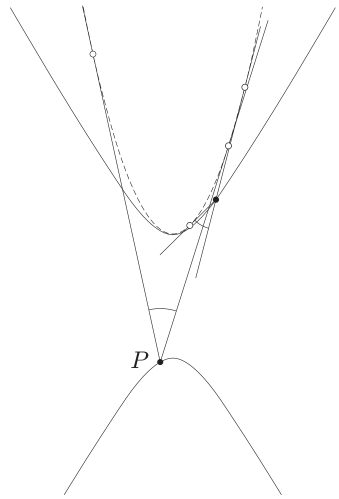
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2.$$

A hiperbola fókuszai tehát $F_1\left(0; \frac{1}{4}\right)$ és $F_2\left(0; -\frac{15}{4}\right)$.



1. ábra

Megjegyzések 1. A *2. ábrán* látható, de a bizonyításból is kiolvasható, hogy a kapott hiperbola „alsó” ágán azok a P pontok találhatók, amelyekből érintőket húzva a létrejövő $30°$-os szögtartomány tartalmazza a parabolát, míg a „felső” ág pontjaira a kiegészítő, $150°$-os szögtartomány belsejében van a parabola.



2. ábra

2. Hasonló eredmény adódik, ha a feladatban adott $30°$ helyett tetszőleges hegyesszöget írunk elő. Ha az érintők szögét $90°$-nak választjuk, akkor a mértani hely egyenlete a fentiek alapján az $m_1m_2=-1$ feltételből $4v+1=0$, ilyenkor a parabola vezéregyenesét kapjuk.

3. A válaszban felbukkant a parabola fókusza és – speciális esetben – a vezéregyenese is. Ha felhasználjuk a kúpszeletek – és ezen belül a hiperbola – egy kevésbé közismert származtatását, akkor ezek az eredmények egységes alakot öltenek. *Hajós György:* Bevezetés a geometriába című könyvének 422. oldalán olvasható a

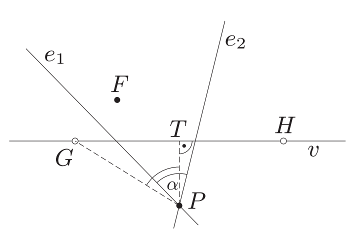
42.5 Tétel. *Azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekre egy ponttól való távolságukat egy a ponton át nem haladó egyenestől való távolságukkal osztva megadott pozitív értéket kapunk, ellipszis, hiperbola vagy parabola aszerint, amint az adott érték* 1*-nél kisebb,* 1*-nél nagyobb vagy* 1*-gyel egyenlő. Ilyen mértani helyként minden kúpszeletet megkaphatunk.*

Az adott pont a kúpszelet – egyik – *fókusza,* a rá nem illeszkedő egyenest általában is a kúpszelet *vezéregyenesének* nevezik, az adott állandót pedig a kúpszelet *excentricitásának.* A feladat megoldása ebben a formában közvetlenül is megkapható a (4) egyenletből: ha rendezés után mindkét oldalhoz $\left(v+\frac{7}{4}\right)^2+3\left(v-\frac{1}{4}\right)^2$-t adunk, (ez a lépés az eredmény ismerete nélkül nem egészen magától értetődő), akkor

$$3\left[u^2+\left(v-\frac{1}{4}\right)^2\right]=3\left(v-\frac{1}{4}\right)^2+\left(v+\frac{7}{4}\right)^2-3=4v^2+2v+\frac{1}{4}=4\left(v+\frac{1}{4}\right)^2$$

adódik. A bal oldalon a P pontnak a parabola fókuszától való távolsága négyzetének a 3-szorosa, a jobb oldalon pedig a P vezéregyenestől való távolsága négyzetének a 4-szerese áll. Az idézett tétel szerint tehát a mértani hely egy olyan hiperbola, amelynek fókusza és vezéregyenese a parabola fókusza, illetve vezéregyenese. A tételben szereplő arány értéke $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Akinek jó a számérzéke vagy egy kicsit tovább kísérletezik az (1) összefüggéssel, az eljuthat ennek az értéknek a jelentéséhez is. A most következő megoldásból, amely a parabola érintőinek geometriai tulajdonságait felhasználva közvetlenül a fenti tétel alapján talál rá a mértani helyre, ennek az aránynak az értéke is kiderül.

II. megoldás. Tegyük föl, hogy az F fókuszú v vezéregyenesű parabola a külsejében fekvő P pontból α szögben látszik. A fókusz tükörképét a két érintőre jelölje G és H; ezek a pontok, mint ismert, a vezéregyenesen vannak. Jelölje végül a P vetületét a vezéregyenesen T (*3. ábra*).



3. ábra

Ha v elválasztja P-t és F-et, akkor a tükrözések miatt $GPH\sphericalangle = 2\alpha$, azért $GPT\sphericalangle = \alpha$. A GPT derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{PT}{PG} = \frac{PT}{PF}.$$

Ha P a v-nek ugyanarra az oldalára esik, mint F, akkor a *4. ábra* szerint

$$GPT\sphericalangle = 180^\circ - \alpha.$$

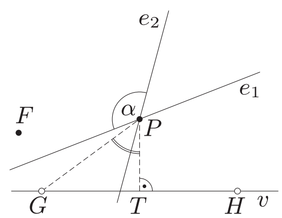
Ekkor a GPT derékszögű háromszögben:

$$-\cos\alpha = \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{PT}{PG} = \frac{PT}{PF}.$$

Mindez azt jelenti, hogy adott $\alpha \neq 90^\circ$ szög esetén a

$$|\cos\alpha| = \frac{PT}{PF}$$

feltétel pontosan azokra a P pontokra teljesül, amelyekből a parabola α vagy $180^\circ - \alpha$ szögben látszik és a két lehetőség aszerint valósul meg, hogy hogy a parabola vezéregyenese elválasztja-e a P és az F pontokat vagy sem. Az idézett tétel szerint tehát a keresett mértani hely egy olyan hiperbola, amelynek a parabolával közös a fókusza és a vezéregyenese, excentricitása pedig $|\cos\alpha|$.



4. ábra

Megjegyzés. A fentiekből az is leolvasható, hogy $\alpha = 90^\circ$ esetén $PT = 0$, azaz ilyenkor a parabola vezéregyenesét kapjuk.