**Megoldás.** Tegyük fel, hogy az egymást követő $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$ pozitív egészek szorzata köbszám. Mivel $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ nem köbszám, $n\geq2$. A szorzat prímtényezős alakjában mindegyik prím kitevője 3-mal osztható. Legyen $p$ egy ilyen prímszám, ekkor a négy szám valamelyike osztható $p$-vel. Ha $p>3$, akkor a négy közül csak egyetlen szám lehet $p$-vel osztható, ellenkező esetben $p$ osztaná a két szám különbségét, ami legfeljebb 3. Így a négy szám bármelyikének prímtényezős alakjában a 3-nál nagyobb prímek kitevője 3-mal osztható. Speciálisan, ha a számok valamelyike sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható, akkor maga is köbszám. Ilyen pedig biztosan létezik, hiszen a négy, egymást követő szám közül kettő páratlan, és – különbségük 2 lévén – legalább az egyikük nem osztható 3-mal. Ebből következik, hogy a négy szám szorzatát e köbszámmal elosztva a további három szám szorzataként is köbszámot kapunk. Legyen ez a három szám $a$, $b$ és $c$, ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $n^3<n(n+1)(n+2)\leq abc\leq(n+1)(n+2)(n+3)<(n+2)^3$. Ez azt jelenti, hogy $abc$ csak úgy lehet köbszám, ha $abc=(n+1)^3$. Azonban – minden $n\geq2$ egészre –

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+1)^3}=\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<1,$$

$$\frac{n(n+1)(n+3)}{(n+1)^3}=\frac{n^2+3n}{n^2+2n+1}>1,$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)^3}>1,$$

$$\frac{n(n+2)(n+3)}{(n+1)^3}=\frac{n^3+5n^2+6n}{n^3+3n^2+3n+1}>1,$$

azaz $abc$ szóba jövő értékei közül három nagyobb, egy pedig kisebb, mint $(n+1)^3$. Tehát négy egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet köbszám.