Megoldás. A négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám, ezért $2 \le x \le 3$. A négyzetgyökök értéke sem negatív, így elegendő $y^2 = \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}\right)^2$ legkisebb és legnagyobb értékét meghatározni.

Legyen $\sqrt{x-2} = u$ és $\sqrt{3-x} = v$, ekkor az $(u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2+v^2)$ azonosság szerint

$$\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}\right)^2 + \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x}\right)^2 = 2\big[(x-2) + (3-x)\big] = 2.$$

Rendezés után az $\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x} = z$ jelölést bevezetve:

$$y^2 = 2 - \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x}\right)^2 = 2 - z^2.$$

y^2 akkor lesz a legnagyobb, ha z^2 a legkisebb, azaz 0. Ez akkor teljesül, ha $x - 2 = 3 - x$, és innen $x = 2{,}5$. Ezen a helyen $z = 0$, $y^2 = 2$, tehát y legnagyobb értéke $\sqrt{2}$.

A legkisebb érték meghatározásához tekintsük az y^2 kifejezést:

$$y^2 = (x-2) + (3-x) + 2\sqrt{(x-2)(3-x)} = 1 + 2\sqrt{(x-2)(3-x)}$$

alakban. A négyzetgyök definíciója szerint a második tag nem negatív, ezért $y^2 \ge 1$. Ez lehetséges is, ha a második tag 0, azaz $x = 2$ vagy $x = 3$. Ezeken a helyeken veszi fel a kifejezés a legkisebb értéket, és ez $\sqrt{1} = 1$.

Megjegyzés. Ha bevezetjük a $t = 2{,}5 - x$ változót, akkor $|t| \le \dfrac{1}{2}$ és a kifejezés az új változónak pozitív értékű páros függvénye:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = \sqrt{\frac{1}{2} + t} + \sqrt{\frac{1}{2} - t} = f(t).$$

f és f^2 egyszerre minimális és maximális, $f^2(t) = 1 + 2\sqrt{\dfrac{1}{4} - t^2}$, ez pedig a $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ intervallumban a t változó szigorúan monoton fogyó függvénye: $f^2(0) = 2 \ge f^2(t) \ge f^2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, tehát a szóban forgó kifejezés legkisebb értéke 1 (ha $|t| = \dfrac{1}{2}$, azaz $x = 2$ vagy $x = 3$), legnagyobb értéke pedig $\sqrt{2}$ (ha $t = 0$, azaz $x = \dfrac{5}{2}$).