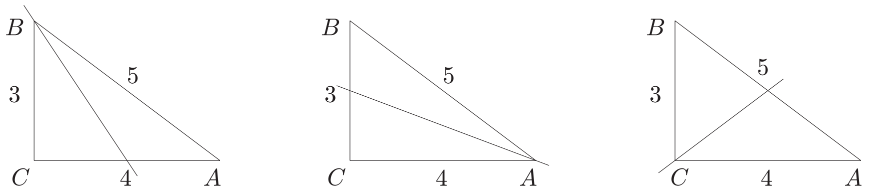
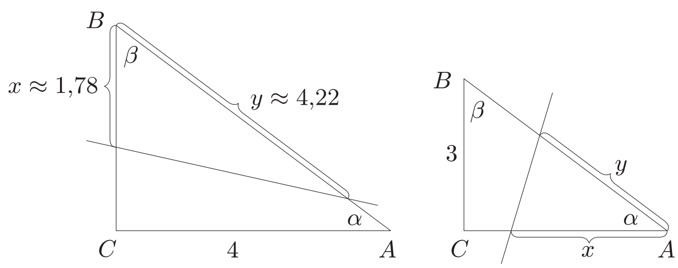
Megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait, oldalait, szögeit a szokásos módon (a derékszög a C csúcsnál van). Legyen $AC = 4$ és $BC = 3$. Azt állítjuk, hogy a keresett egyenes nem mehet át a háromszög egyik csúcsán sem. A csúcson áthaladó egyenes ugyanis a háromszöget két olyan háromszögre bontja, amelyek magassága egyenlő. Ha még a területük is egyenlő, akkor az alapjuk is egyenlő, de akkor a kerületek nem egyenlők (*1. ábra*).



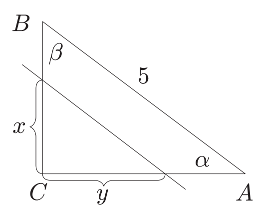
$k = 3 + 2 \neq 2 + 5$ $\qquad$ $k = 4 + 1{,}5 \neq 5 + 1{,}5$ $\qquad$ $k = 4 + 2{,}5 \neq 3 + 2{,}5$

1. ábra

A keresett egyenes vagy egy befogót és egy átfogót metsz (*2. ábra*), vagy két befogót (*3. ábra*), mindkét esetben egy háromszögre és egy négyszögre bontja a derékszögű háromszöget.



2. ábra



3. ábra

Az első esetben jelöljük a lemetszett szakaszokat x-szel és y-nal a *2. ábra* szerint. A derékszögű háromszög területe: $t = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$, kerülete: $k = 3 + 4 + 5 = 12$. A lemetszett háromszög területe a feltétel szerint:

$$t_1 = \frac{xy \sin\beta}{2} = 3, \qquad \text{vagy} \qquad \frac{xy \sin\alpha}{2} = 3.$$

Írjuk be $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ és $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ értékét:

$$t_1 = \frac{x \cdot y \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{4xy}{10} = 3, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{x \cdot y \cdot \frac{3}{5}}{2} = \frac{3xy}{10} = 3.$$

Innen

$$xy = \frac{15}{2} \tag{1}$$

illetve

$$xy = 10. \tag{2}$$

A kerületekre fennálló egyenlőségek miatt: $x + y = 6$. Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve a $2x^2 - 12x + 15 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Innen

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 120}}{4} = \begin{cases} \dfrac{6 + \sqrt{6}}{2} \approx 4{,}22 > 3: \text{ nem megoldás,} \\ \dfrac{6 - \sqrt{6}}{2} \approx 1{,}78 \text{ és } y = \dfrac{6 + \sqrt{6}}{2} \approx 4{,}22: \text{ megoldás.} \end{cases}$$

A (2) egyenletből $x^2-6x+10=0$. Ennek az egyenletnek negatív a diszkriminánsa, így nincs megoldása.

Ha az egyenes a két befogót metszi, akkor

$$\frac{xy}{2}=3, \qquad x+y=6.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\{x;y\}=\left\{3-\sqrt{3};3+\sqrt{3}\right\}$. A két szám közül a nagyobbik 4-nél nagyobb, így nem kapunk megoldást.

A feladatnak tehát egy megoldása van; ekkor az egyenes a rövidebbik befogót és az átfogót metszi, a kiszámított módon.