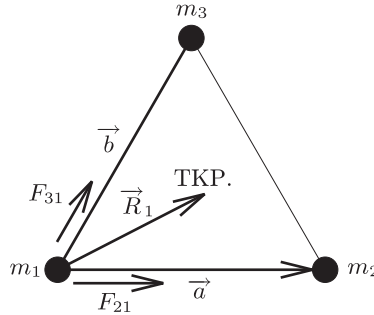


Megoldás. a) Jelöljük az m_1 tömegű korongtól az m_2 tömegűhöz mutató vektort \vec{a} -val, az m_3 -hoz mutatót pedig \vec{b} -vel az ábrán látható módon.



Egy pontrendszer tömegközéppontjába mutató vektor általánosan az

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

képletből határozható meg. Jelen esetben a tömegközéppont vektora az m_1 tömegű testtől mérve

$$\vec{R}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{a} + \frac{m_3}{M} \vec{b},$$

ahol $M = m_1 + m_2 + m_3$ a rendszer össztömege. Ennek a vektornak a négyzete

$$R_1^2 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 L^2 + \left(\frac{m_3}{M}\right)^2 L^2 + 2 \frac{m_2 m_3}{M^2} \vec{a} \vec{b}.$$

Tekintettel arra, hogy a három korong szabályos háromszöget alkot, az \vec{a} és \vec{b} vektorok 60° -os szöveget zárnak be egymással, a skalárszorzatuk

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} L^2.$$

Megjegyzés. Ugyanezt az összefüggést megkaphatjuk a harmadik oldal hosszát megadó képletből is:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = L^2 + L^2 + 2 \vec{a} \vec{b} = L^2.$$

A fenti képleteket összevetve a tömegközéppont és az m_1 tömegű test távolságára ez adódik:

$$R_1 = \frac{\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}}{M} L = 0,42 \text{ m.}$$

Hasonló módon (a szerepek felcserélésével) kapjuk a tömegközéppont és a másik két korong távolságát is:

$$R_2 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3}}{M} L = 0,38 \text{ m} \quad \text{és} \quad R_3 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}}{M} L = 0,26 \text{ m.}$$

b) A tömegpontnak tekinthető korongok egyenletes körmozgást végeznek a tömegközéppont körül. Ennek megfelelően például az m_1 tömegű test mozgásegyenlete $m_1 \omega^2 \vec{R}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$, ahol az egyenlet jobb oldalán szereplő két vektor a 2-es és a 3-as jelzésű testnek az 1-esre kifejtett erőhatását jelöli. Ezek iránya a testeket összekötő fonalak irányával megegyező, tehát

$$\vec{F}_{21} = F_{21} \cdot \frac{\vec{a}}{L} \quad \text{és} \quad \vec{F}_{31} = F_{31} \cdot \frac{\vec{b}}{L},$$

ahol a nyíl nélküli mennyiségek a megfelelő vektorok nagyságát jelölik.

A fenti kifejezést a mozgásegyenletbe helyettesítve és az \vec{R}_1 konkrét alakját megadó kifejezést is felhasználva kapjuk:

$$m_1 \omega^2 \left(\frac{m_2}{M} \vec{a} + \frac{m_3}{M} \vec{b} \right) = F_{21} \cdot \frac{\vec{a}}{L} + F_{31} \cdot \frac{\vec{b}}{L}.$$

Mivel az egyenlet jobb és bal oldalán szereplő vektorok felbontása \vec{a} és \vec{b} irányú összetevőkre *egyértelmű*, az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha az \vec{a} irányú tagok és a \vec{b} irányú tagok külön-külön megegyeznek. Innen

$$F_{21} = \frac{m_1 m_2}{M} L \omega^2 = 3,53 \text{ N}, \quad F_{31} = \frac{m_1 m_3}{M} L \omega^2 = 6,12 \text{ N},$$

és végül a harmadik erő (amely a szerepek felcserélésével kapható):

$$F_{23} = \frac{m_2 m_3}{M} L \omega^2 = 9,18 \text{ N.}$$