I. megoldás. Mivel $\operatorname{ctg} 70° = \dfrac{\cos 70°}{\sin 70°}$, így a bizonyítandó egyenlőség ekvivalens a

$$\cos 70° + 4\cos 70° \sin 70° = \sqrt{3} \sin 70°$$

egyenlettel. $2\cos 70° \sin 70° = \sin 140°$, ezt beírva, 2-vel osztva és rendezve:

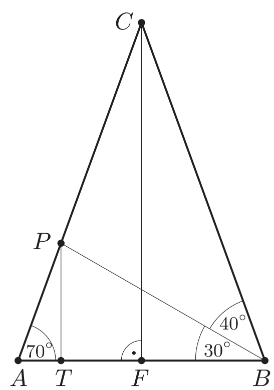
$$\sin 140° = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 70° - \frac{1}{2} \cos 70°.$$

Mivel $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$ és $\dfrac{1}{2} = \sin 30°$, az addíciós tételt felhasználva

$$\cos 30° \sin 70° - \sin 30° \cos 70° = \sin(70° - 30°) = \sin 40°,$$

ami valóban $\sin 140°$, hiszen minden α-ra $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$.

II. megoldás. A feladat a 70°-os szögről szól. Vegyünk fel egy egyenlő szárú háromszöget, melynek alapon lévő szögei 70°-osak. Így geometriai értelmezést adhatunk a feladatnak. Legyen P a háromszög AC szárán az a pont. melyre $ABP\sphericalangle$ 30°-os. Állítsunk merőlegest a P pontból az AB alapra, a talppont legyen T, AB felezőpontja pedig az F pont.



Legyen $PT = 1$, ekkor

$$PB = \frac{PT}{\sin 30°} = 2, \quad TB = PB \cdot \cos 30° = \sqrt{3},$$

$$\frac{AT}{PT} = \operatorname{ctg} 70°.$$

Legyen $x = AT = PT \cdot \operatorname{ctg} 70° = \operatorname{ctg} 70°$.

Az ATP háromszögben a Pitagorasz-tételt használva: $AP = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$AB = AT + TB = x + \sqrt{3}, \quad AF = \frac{AB}{2} = \frac{x + \sqrt{3}}{2},$$

$$TF = AF - AT = \frac{x + \sqrt{3}}{2} - x = \frac{\sqrt{3} - x}{2}.$$

A BPC háromszög egyenlő szárú, így $PC = PB = 2$.

A párhuzamos szelők tételének következménye szerint:

$$\frac{AT}{AP} = \frac{TF}{PC}, \quad \text{azaz} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3} - x}{4}.$$

Vagyis sikerült belátnunk, hogy ha $x = \operatorname{ctg} 70°$, akkor

$$x + 4 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{3}.$$

Mivel $\cos 70° = \dfrac{AT}{AP} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, azért ez éppen a bizonyítandó állítás:

$$\operatorname{ctg} 70° + 4\cos 70° = \sqrt{3}.$$