I. megoldás. A $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Mivel a betűknek nincs kitüntetett szerepük, az is igaz, hogy $4Rs_b \geq a^2 + c^2$ és $4Rs_c \geq a^2 + b^2$. A három egyenlőtlenséget összeadva, 2-vel való osztás után nyerjük a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

Mivel $(2s_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, a $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenség ekvivalens a

$$4R^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) \geq (b^2 + c^2)^2$$

egyenlőtlenséggel, amit $(2R)^4$-nel osztva a szinusz tétel alapján

$$2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha \geq (\sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2$$

alakra hozhatunk. (A szinusz tétel alábbi alakját használtuk:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.)$$

A $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$ és $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ összefüggések alapján a bal oldali kifejezés

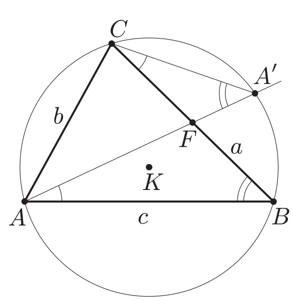
$$\begin{aligned}
&2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\beta\cos^2\gamma - \cos^2\beta\sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \\
&= \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin^2\beta\sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \\
&= (\sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 + (\sin^2\beta - \sin^4\beta) + (\sin^2\gamma - \sin^4\gamma) - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \\
&= (\sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 + \sin^2\beta\cos^2\beta + \sin^2\gamma\cos^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma = \\
&= (\sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 + (\sin\beta\cos\beta - \sin\gamma\cos\gamma)^2.
\end{aligned}$$

Ez valóban nagyobb vagy egyenlő a jobb oldalon álló kifejezésnél, és egyenlőség pontosan $\sin\beta\cos\beta = \sin\gamma\cos\gamma$ esetén áll fenn, vagyis ha $\sin 2\beta = \sin 2\gamma$.

Igaz tehát a feladatban megfogalmazott egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan $\sin 2\alpha = \sin 2\beta = \sin 2\gamma$ esetén áll fenn. Ez csak úgy lehet, ha $\alpha = \beta = \gamma$, vagyis ha a háromszög szabályos.

A most következő megoldásokban a háromszög köré írható körének középpontját K-val jelöljük, a BC oldal felezőpontja pedig legyen F.

II. megoldás. Az előző megoldáshoz hasonlóan a $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenséget igazoljuk. Az AF súlyvonal meghosszabbításának a köré írt körrel vett metszéspontja legyen A'. A kerületi szögek tétele szerint $ABF\sphericalangle = CA'F\sphericalangle$ (mindkét szög az AC ívhez tartozó kerületi szög) és $BAF\sphericalangle = A'CF\sphericalangle$ (mindkét szög az $A'B$ ívhez tartozó kerületi szög). Így az ABF és a $CA'F$ háromszögek hasonlók, hiszen szögeik egyenlő nagyságúak. A hasonlóság miatt $\frac{A'C}{BA} = \frac{FC}{FA}$, amiből $A'C = \frac{ac}{2s_a}$. Hasonlóan, az ACF és a $BA'F$ háromszögek hasonlóságából kapjuk, hogy $A'B = \frac{ab}{2s_a}$.



Írjuk fel Ptolemaiosz tételét a $BACA'$ húrnégyszögre:

$$AA' \cdot a = A'C \cdot c + A'B \cdot b.$$

Mivel AA' a köré írt kör húrja, így legfeljebb $2R$ hosszúságú. Ezt az észrevételt és korábbi eredményeinket felhasználva a következőt kapjuk:

$$2R \geq AA' = \frac{A'C \cdot c + A'B \cdot b}{a} = \frac{\frac{ac}{2s_a} \cdot c + \frac{ba}{2s_a} \cdot b}{a} = \frac{c^2 + b^2}{2s_a},$$

ezért a $4Rs_a \geq b^2 + c^2$ egyenlőtlenség valóban érvényes.

Egyenlőség pontosan akkor van, ha az ABC háromszög mindegyik súlyvonala $2R$ hosszúságú húrt metsz ki a köré írt körből, vagyis ha mind áthaladnak a köré írt kör középpontján. Ez akkor teljesül, ha a súlypont és a köré írt kör középpontja egybeesik, vagyis ha a háromszög szabályos.

III. megoldás. Mivel K illeszkedik a BC oldal felezőmerőlegesére, a BF és FK vektorok merőlegesek egymásra: BFK derékszögű háromszög, vagy pedig $F=K$. Pitagorasz tétele szerint:

$$KF=\sqrt{KB^2-BF^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

ez az $F=K$ esetben is igaz.

Az AKF (esetleg elfajuló) háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség szerint $|AF-AK|\le KF$, azaz

$$|s_a-R|\le\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A kapott egyenlőtlenséget négyzetre emelve, majd rendezve:

$$(s_a-R)^2\le R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2,\qquad s_a^2+\frac{a^2}{4}\le 2Rs_a.$$

Ugyanígy kapjuk az $s_b^2+\frac{b^2}{4}\le 2Rs_b$ és $s_c^2+\frac{c^2}{4}\le 2Rs_c$ egyenlőtlenségeket. A három egyenlőtlenséget összeadva az

$$s_a^2+s_b^2+s_c^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\le 2R(s_a+s_b+s_c)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ismert, hogy egy háromszög súlyvonalainak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének $\frac{3}{4}$-szeresével. Így

$$2R(s_a+s_b+s_c)\ge s_a^2+s_b^2+s_c^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}=$$

$$=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2,$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Az előző megoldásban látottakhoz hasonlóan gondolható meg, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha a háromszög szabályos.

IV. megoldás. K-ból az A, B, C csúcsokba mutató vektorok legyenek rendre $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Mivel K a köré írt kör középpontja, az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ hossza R.

A háromszög BC oldalának felezőpontjából az A csúcsba mutató vektor $\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}+\mathbf{z}}{2}$, ennek hossza pedig s_a. Két vektor skaláris szorzata kisebb, vagy egyenlő, mint a vektorok hosszának szorzata, ezt az észrevételt az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}+\mathbf{z}}{2}$ vektorokra alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\mathbf{x}\cdot\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}+\mathbf{z}}{2}\right)\le Rs_a,\qquad 2\mathbf{x}^2-\mathbf{xy}-\mathbf{xz}\le 2Rs_a.$$

Teljesen hasonlóan igazolhatók a

$$2\mathbf{y}^2-\mathbf{yz}-\mathbf{yx}\le 2Rs_b\qquad\text{és}\qquad 2\mathbf{z}^2-\mathbf{zx}-\mathbf{zy}\le 2Rs_c$$

egyenlőtlenségek. A három egyenlőtlenséget összeadva, majd a kapott egyenlőtlenség bal oldalát átalakítva éppen az igazolandó állítást kapjuk:

$$2\mathbf{x}^2+2\mathbf{y}^2+2\mathbf{z}^2-2\mathbf{xy}-2\mathbf{yz}-2\mathbf{zx}\le 2R(s_a+s_b+s_c),$$

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2+(\mathbf{z}-\mathbf{x})^2\le 2R(s_a+s_b+s_c),$$

$$a^2+b^2+c^2\le 2R(s_a+s_b+s_c),$$

hiszen az $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{y}-\mathbf{z}$, $\mathbf{z}-\mathbf{x}$ vektorok hossza rendre c, a, b.

Könnyen meggondolható, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.