I. megoldás. Legyen s a sötét háromszögek száma.

Ha $n=1$, akkor $s=1=\binom{3}{0}$.

Ha $n=2$, akkor $s=4=\binom{4}{1}$.

Ha $n=3$, akkor $s=10=\binom{5}{2}$.

Ha $n=4$, akkor $s=20=\binom{6}{3}$.

Ha $n=5$, akkor $s=35=\binom{7}{4}$.

Úgy tűnik, igaz az $s(n)=\binom{n+2}{n-1}$ összefüggés. Felhasználva, hogy $\binom{n+2}{n-1}=\binom{n+2}{3}$, teljes indukcióval belátjuk, hogy $s(n)=\binom{n+2}{3}$.

$n=1$-re igaz, ezt már láttuk. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra is igaz: $s(k)=\binom{k+2}{3}$. Tudjuk, hogy

$$s(k+1)=s(k)+\big[1+2+\ldots+k+(k+1)\big] \quad \text{és} \quad s(k)=\binom{k+2}{3}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

Ezért

$$s(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}=\binom{k+3}{3}.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk. Az n-edik háromszögig összesen felhasznált kis sötét háromszögek száma:

$$\binom{n+2}{3}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

II. megoldás. Az n-edik ábrán $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ db sötét és $\frac{n(n-1)}{2}$ db fehér háromszög van. Vagyis a háromszögek száma az n-edik ábrán összesen:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)+n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n+n^2-n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2.$$

A négyzetszámok összegének képlete szerint:

$$1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

tehát az n-edik ábráig ennyi háromszöget használtunk fel összesen. A $(k-1)$-edik ábrán pontosan annyi sötét háromszög van, mint amennyi fehér háromszög a k-adikon. Tehát annyival van több a sötét háromszögekből, mint amennyi sötét háromszög van az n-edik ábrán. Az n-edik ábrán pedig $\frac{n(n+1)}{2}$ sötét háromszög van.

Az n-edik ábráig felhasználtunk m db fehér háromszöget és $m+\frac{n(n+1)}{2}$ db sötét háromszöget. Tehát:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=m+m+\frac{n(n+1)}{2},$$

$$(n^2+n)(2n+1)=12m+3n^2+3n,$$

$$2n^3+n^2+2n^2+n=12m+3n^2+3n,$$

$$2n^3=12m+2n,$$

$$\text{amiből} \qquad m=\frac{n^3-n}{6}.$$

Tehát az n-edik ábráig felhasznált sötét háromszögek száma:

$$\frac{n^3-n}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3-n}{6}+\frac{3n(n+1)}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$