

**Megoldás.** A mutatvány végrehajtásához természetesen nincs szükség természetfölötti képességekre. Az alábbiakban megadunk két, legalábbis részben különböző módszert az ötödik lap meghatározására.

*1. módszer.* A francia kártya lapjai négyféle színűek lehetnek, az öt kártya között tehát vannak azonos színűek. Az első kártya segítségével a segéd így közölheti az utolsónak hagyott kártya színét: megállapodhat a bűvésszel, hogy az utolsó, ötödik lap ugyanolyan színű lesz majd, mint az első.

Az egyes színeken belül számozzuk meg a lapokat a szokásos módon 1-től 13-ig: Ász: 1, Kettes: 2, ..., Tíz: 10, J: 11, Q: 12, K: 13. Ha az utolsónak átadandó lap sorszáma  $x$ , az első pedig  $y$ , akkor az első és az ötödik lap színe azonos, azért  $1 \leq x \neq y \leq 13$ . Megmutatjuk, hogy előzetes megállapodás után a második, harmadik és negyedik lap segítségével a segéd közölhet annyi információt, hogy a bűvész az  $y$  ismeretében meg tudja határozni  $x$  értékét és így magát az utolsó kártyalapot is.

Vegyük észre, hogy ha a színeket is rangsoroljuk, mondjuk a bridzsben szokásos treff, káró, kőr, pikk erősség szerint növekvően, és azonos színű lapok között a fenti számozást vesszük figyelembe, akkor bármely két kártyalap sorrendje egyértelműen eldönthető. Egy ilyen, úgynevezett lexikografikus rendezésben – amelyben a segéd és a bűvész jóelőre megállapodhatnak – a középső három kártyalap  $3! = 6$ -féle sorrendben adható át, a segéd tehát 6-féle információt, vagyis megfelelő előzetes megállapodás szerint egy 1 és 6 közé eső  $s$  egész számot közölhet a bűvésszel. Az  $y$  és az  $s$  segítségével próbálhatja meg a segéd a bűvésszel tudatni  $x$  értékét.

Hatféle szám ehhez kevésnek látszik, hiszen az  $y$  ismeretében az  $x$  még 12-féle értéket vehet föl. Első ránézésre egyáltalán nem világos, miképpen csökkenthető a felére a lehetőségek száma. Azon múlik a dolog, hogy a segéd a két egyszínű kártyalap közül eldöntheti, melyiket adja át elsőnek és melyiket utoljára, így pedig megfelelő előzetes megállapodás után ezzel is közölhet információt. Egy lehetőség a következő.

Legyen a két szélsőnek választott egyszínű kártyalap számértéke  $a$  és  $b$ , ahol  $a < b$ . Ekkor  $1 \leq b - a \leq 12$ , különböztessünk meg tehát két esetet aszerint, hogy ez a különbség kisebb-e 7-nél (ez hat lehetőség) vagy pedig nem (ez is hat lehetőség). Az első esetben legyen  $y = a$  és  $s = b - a$ , végül  $x = b$ , a másodikban pedig legyen  $y = b$ ,  $s = 13 - (b - a)$  és  $x = a$ . Mindkét esetben nyilván  $1 \leq s \leq 6$ , továbbá  $x$ , tehát az ötödiknek átadott kártyalap számértéke éppen az  $y + s$  összeg maradéka 13-mal osztva.

Úgy is fogalmazhatjuk a dolgot, hogy ha a kártyalapok számozását ciklikusan folytatjuk mod 13, tehát például a 14-es is Ászt jelent, a 15-ös Kettést, és így tovább, akkor a két érték,  $a$  és  $b$  egyikéhez legfeljebb 6-ot adva megkapjuk a másik lap számértékét – esetleg 13-mal eltolva. Ha a segéd ezt a lapot adja át elsőnek, akkor a következő három lap sorrendjével közölheti  $s$  értékét a bűvésszel, aki az  $y + s$  összeg 13-as maradékát kiszámolva megkapja az ötödik lap  $x$  számértékét.

*2. módszer.* Ha az első négy között van egy azonosítható „viszonyítási kártyalap”, akkor a leírt ciklikus számozás ötletével közvetlenül is a felére csökkenthető a lehetőségek száma. A fenti rendezés alapján például a kártyalapok megszámozhatók az 1-től 52-ig terjedő egész számokkal, Treff Ász: 1-től Pikk Király: 52-ig. Az első négy átadott lapnak a fenti rendezésben  $4! = 24$ -féle sorrendje van, ezt kihasználva  $s$  1-től 24-ig bármilyen egész szám lehet. A négy átadott kártyalapon kívül 48 lehetőség van, ezek egyikét kell azonosítani az  $s$  24-féle értéke segítségével.

A feleknek tehát csak abban kell megállapodniuk, hogy hogyan ismeri föl a bűvész ezt a „viszonyítási kártyalapot”. Legyen ez a négy, adott sorrendben átadott kártyalap közül a legnagyobb sorszámu. Ez nem függ a négy lap átadásának a sorrendjétől, ezzel a sorrenddel tehát a segéd nyugodtan közölheti az  $s$  értékét. Ha az öt lap számozása  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ , akkor ismét két esetet különböztetünk meg. Ha  $a_5 - a_4 \leq 24$ , akkor legyen az  $a_5$  az utoljára hagyott lap. Ekkor ha  $s = a_5 - a_4$ , a trükk sikerül, hiszen a bűvész ki tudja választani  $a_4$ -et, mint a négy átadott lap legnagyobbikát, a négy lap sorrendje alapján pedig megkapja  $s$  értékét. Ha pedig  $a_5 - a_4 \geq 25$ , akkor a rendezés miatt  $a_5 - a_1 \geq 28$  és így a legnagyobb és a legkisebb kártyalap ciklikus távolsága,  $s = a_1 + 52 - a_5 \leq 24$ . Ekkor a segéd az  $a_1$ -et hagyja a végére, a bűvész pedig  $a_5$  és  $s$  értékéből megkapja  $a_1$ -et, mint az  $a_5 + s$  összeg maradékát 52-vel osztva.