

Megoldás. Tegyük föl, hogy létezik a megfelelő a_1, a_2, \dots, a_m sorrend. Ha $a_k = m$ valamilyen $k > 1$ -re, akkor $a_1 + \dots + a_{k-1}$ és $a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k$ különbsége osztható m -mel, ezért ugyanazt a maradékot adnák m -mel osztva. Így szükségképpen $a_1 = m$. Ezért $a_1 + \dots + a_{m-1} + a_m = 1 + 2 + \dots + m = \frac{m+1}{2} \cdot m$ biztosan nemnulla maradékot ad ($m > 1$ miatt), vagyis nem lehet m -mel osztható, azaz m páros.

Megmutatjuk, hogy a kapott szükséges feltétel, m párossága elégséges is: minden páros m -re megadható egy kívánt sorrend. Ilyen például a következő:

$$m, 1, m-2, 3, m-4, 5, \dots, 4, m-3, 2, 1,$$

azaz a páros maradékok csökkenő sorrendben az első, harmadik, ötödik helyen stb., a páratlanok pedig növekvő sorrendben a második, negyedik, hatodik helyen stb. Kiszámítjuk $a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k$ maradékát. Ha $k = 2t$ páros, akkor az összeg

$$\begin{aligned} m+1 + (m-2) + 3 + \dots + (m-2t+2) + (2t-1) &= \\ &= (m + (m-2) + \dots + (m-2t+2)) + (1 + 3 + \dots + (2t-1)) = \\ &= \frac{t}{2}((2m-2t+2) + 2t) = (m+1)t \equiv t \pmod{m}, \end{aligned}$$

míg páratlan $k = 2t + 1$ esetén az összeg maradéka

$$t + (m-2t) = m-t \equiv -t \pmod{m}.$$

Tehát a részletösszegek sorozatának m -mel való osztási maradékai rendre:

$$0, 1, -1, 2, -2, \dots, \frac{m-2}{2}, -\frac{m-2}{2}, \frac{m}{2};$$

az összes maradék, mindegyik pontosan egyszer.