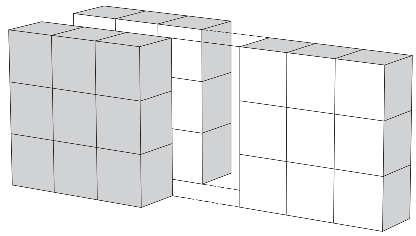
Megoldás. Ahhoz, hogy 10-nél több kis kockából egy nagyobb tömör kockát kapjunk, legalább 27 kis kockát kell felhasználni. Ekkor egy $3 \times 3 \times 3$-as nagy kockát kapunk. Fessük be a lapjait, és kezdjük el leválasztani a befestett lapokat.

Először vegyük el az „elülső” és „hátsó” 3×3-as réteget. A megmaradó 3×3-as rétegben már csak 1 festetlen kis kocka marad. Mivel $1 \mid 26$, itt teljesül, hogy a festett kockák száma többszöröse a festetlen kockák számának.



Általában, ha $(n+2)^3$ számú kis kockából összerakunk egy nagy kockát és befestjük a lapjait, akkor a be nem festett kockák száma n^3 lesz. Kérdés, mikor lesz n^3 osztója az $(n+2)^3 - n^3$-nek. Ha ez teljesül, akkor az is igaz, hogy n^3 osztója az $(n+2)^3$-nek, amiből következik, hogy n is osztója az $(n+2)^3$-nek. Azaz $n \mid n^3 + 6n^2 + 12n + 8$. Ez csak úgy teljesülhet, ha $n \mid 8$, vagyis ha $n = 1$, 2, 4 vagy 8.

Ha $n = 1$, akkor $n + 2 = 3$ és $3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$, ami valóban többszöröse 1-nek.

Ha $n = 2$, $n + 2 = 4$, $(n+2)^3 - n^3 = 64 - 8 = 56$; most is igaz, hogy $8 \mid 56$.

Ha $n = 4$, akkor $n + 2 = 6$, $(n+2)^3 - n^3 = 216 - 64 = 152$, most $64 \nmid 152$. Ekkor nem kapunk megoldást.

Végül, ha $n = 8$, akkor $(n+2)^3 - n^3 = 1000 - 512 = 488$ és $512 \nmid 488$.

Összesen tehát két olyan kocka van, amely megfelel a kívánalmaknak.

Megjegyzés. 1. A feladat kérdésének megválaszolásához elegendő volt megmutatni, hogy létezik a kívánalmaknak megfelelő festett kocka.

2. A számelmélet alaptételéből (a prímtényezős alak egyértelműségéből) következik, hogy n^3 pontosan akkor osztója $(n+2)^3$-nek, ha $n \mid n + 2$, azaz $n \mid 2$. Ebből látszik, hogy n értéke csak 1 vagy 2 lehet.