Megoldás. Ha $n < 10^9$, akkor n legfeljebb 9-jegyű, így n kielégíti a feltételeket. Tegyük fel, hogy $10^k \leq n < 10^{k+1}$, ahol $9 \leq k$ alkalmas egész szám. Tekintsük az összes $2k$-jegyű, csak 1, 2, 3, 4 számjegyeket tartalmazó számot. Ezek mindegyike kisebb, mint $10^{2k} \leq n^2$, a számuk pedig:

$$4^{2k} = 16^k = 1{,}6^k \cdot 10^k \geq 1{,}6^9 \cdot 10^k > \sqrt{2}^{\,8} \cdot 10^k = 16 \cdot 10^k > 10^{k+1} > n.$$

A skatulya-elv miatt kiválasztható közülük kettő, melyek n-nel osztva ugyanazt a maradékot adják. E két szám különbsége n-nel osztható, továbbá kisebb, mint n^2. Mivel számjegyeik között csak az 1, 2, 3, 4 számjegyek fordulnak elő, ezért a különbségükben nem szerepel sem 4-es, sem 5-ös számjegy. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.