Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az x^3-2 polinomnak nincs sem első-, sem pedig másodfokú osztója a racionális együtthatós polinomok között. Ha ugyanis lenne ilyen, akkor x^3-2 egy első- és egy másodfokú racionális együtthatós polinom szorzata lenne. Az elsőfokú $ax+b$ osztónak a $\dfrac{-b}{a}$ racionális szám gyöke, ami így gyöke lenne az x^3-2 polinomnak is. Azonban egy racionális $\dfrac{K}{N}$ szám (ahol K és N egymáshoz relatív prím egészek) köbe sosem 2, hiszen $K^3=2N^3$ esetén a 2 kitevője a bal oldalon (K^3 prímtényezős felbontásában) osztható 3-mal, a jobb oldalon pedig nem, ami lehetetlen.

Másodjára azt igazoljuk, hogy α, β, γ racionális számokkal $\alpha+\beta\sqrt[3]{2}+\gamma\sqrt[3]{4}=0$ csak $\alpha=\beta=\gamma=0$ esetén állhat fenn. Ekkor $\sqrt[3]{2}$ gyöke – az x^3-2 polinomon kívül – a (legfeljebb másodfokú) $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ polinomnak; ekkor gyöke e két polinom legnagyobb közös osztójának, $d(x)$-nek is. Az elsőként igazolt tulajdonság miatt $d(x)$ csak harmadfokú vagy konstans polinom lehet. Ha $d(x)$ harmafokú, akkor csak úgy lehet egy legfeljebb másodfokú polinomnak az osztója, ha az nulla, vagyis $\alpha=\beta=\gamma=0$. Ha pedig $d(x)$ konstans, akkor – mivel van gyöke – csak a nulla polinom lehet, ami viszont nem osztója x^3-2-nek; ez az eset tehát nem következhet be.

A feladat állításának bizonyításához végezzük el az $\big(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\big)^3$ hatványozást az $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ azonosság ismételt alkalmazásával:

$$\begin{aligned}\big(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\big)^3&=\big(a+b\sqrt[3]{2}\big)^3+4c^3+3\big(a+b\sqrt[3]{2}\big)c\sqrt[3]{4}\big(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\big)=\\
&=\big(a^3+2b^3+3ab\sqrt[3]{2}\big(a+b\sqrt[3]{2}\big)\big)+4c^3+\\
&\quad+3c\sqrt[3]{4}\big(a^2+b^2\sqrt[3]{4}+2ab\sqrt[3]{2}+ac\sqrt[3]{4}+2bc\big)=\\
&=(a^3+2b^3+4c^3+12abc)+(3a^2b+6b^2c+6ac^2)\sqrt[3]{2}+(3ab^2+3a^2c+6bc^2)\sqrt[3]{4}.\end{aligned}$$

A másodjára bizonyított állítás szerint a kapott szám csak úgy lehet racionális, ha $3a^2b+6b^2c+6ac^2=0$, és $3ab^2+3a^2c+6bc^2=0$. Adjuk hozzá az első egyenlőség b-szereséhez a második $(-a)$-szorosát:

$$0=(3a^2b+6b^2c+6ac^2)b-(3ab^2+3a^2c+6bc^2)a=3c(2b^3-a^3).$$

A megoldás elején beláttuk, hogy a második tényező csak akkor nulla, ha a és b is az, különben pedig $c=0$, amiből például az előbbi első egyenlet révén $ab=0$ következik; tehát ekkor is az a, b, c számok közül legalább kettő nulla.

Megjegyzések. 1. A megoldás fontos részét képező egyértelmű előállíthatóság $A+B\sqrt[3]{2}+C\sqrt[3]{4}$ alakban (illetve ennek általános formája) megtalálható a feladat kitűzőjének, *Fried Ervinnek* a cikkében, lapunk januári számának 7. oldalán.

2. A közölt megoldás módszerével könnyen bizonyítható hasonló állítás $\sqrt[3]{2}$ helyett $\sqrt[3]{n}$-re, ahol n tetszőleges olyan egész, ami nem köbszám. „Felsőbb” algebrai eszközökkel pedig hasonló eredmény látható be $\sqrt[p]{n}$-re is, ha p prímszám, és az n egész nem p-edik hatvány.