Megoldás. Az első egyenletből z-t kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve a műveletek elvégzése után $x^2+y^2+xy=50$ adódik. Ha szorzunk a feltételezés szerint racionális x és y nevezőjének a négyzetével, akkor innen

$$X^2+Y^2+XY=50Z^2 \tag{1}$$

adódik, ahol X, Y, és Z már egész számok és van köztük nullától különböző.

Megmutatjuk, hogy az (1) egyenletnek nincsen a triviális $X=Y=Z=0$ számhármastól különböző megoldása az egész számok körében, innen pedig a feladat állítása következik. Ehhez a 3-mal való oszthatóság, illetve az ilyenkor fellépő maradékok szerint vizsgáljuk (1) két oldalát. Azt bizonyítjuk be, hogy amennyiben (1) teljesül, akkor X, Y és Z is osztható 3-mal. Ez már elég, ugyanis (1)-ben minden tag másodfokú, tehát 9-cel egyszerűsítve ugyanilyen alakú egyenlethez jutunk. Erre az egyenletre a fenti lépést újra és újra megismételve végül az adódik, hogy az (1) egyenlet megoldásai a 3-nak tetszőleges kitevőjű hatványával oszthatók; szükségképpen nullával egyenlők.

Azt kell tehát igazolnunk, hogy ha az X, Y, Z egészekre teljesül (1), akkor $3 \mid X$, $3 \mid Y$ és $3 \mid Z$. Az egyenletet $(X-Y)^2+3XY=48Z^2+2Z^2$ alakba írva látható, hogy $(X-Y)^2$ és $2Z^2$ egyenlő maradékot adnak 3-mal osztva. Ismeretes, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad, ez tehát csak úgy lehetséges, ha $X-Y$ és Z is osztható 3-mal. Mivel $3XY=50Z^2-(X-Y)^2$ és a jobb oldal osztható 9-cel is, azért innen $9 \mid 3XY$, azaz $3 \mid XY$ következik. Mivel a 3 prímszám, X és Y egyike osztható 3-mal. Ennyi viszont már elég, láttuk ugyanis, hogy $X-Y$ osztható 3-mal, így ha egyikük a 3 többszöröse, akkor a másikuk is az. Beláttuk tehát, hogy ha (1) teljesül, akkor $3 \mid X$, $3 \mid Y$ és $3 \mid Z$, a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Érdemes a feladat egyenletrendszerének a jelentését is szemügyre venni. Az első egyenlet egy origón átmenő sík, a második pedig egy origó középpontú 10 egység sugarú gömb egyenlete. A két megoldáshalmaz közös része tehát egy origó középpontú 10 egység sugarú kör a térben, a feladat állítása szerint ezen a körön nincsen olyan pont, amelynek valamennyi koordinátája racionális.