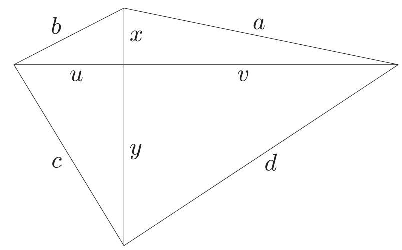
Megoldás. Jelöljük a négyszög oldalait a, b, c és d-vel, az átlók metszéspontja által kapott szakaszokat x, y, u és v-vel, az *ábra* szerint.



A kapott derékszögű háromszögek oldalaira írjuk fel a Pitagorasz-tételt:

$$x^2 + v^2 = a^2, \qquad y^2 + u^2 = c^2,$$
$$x^2 + u^2 = b^2, \qquad y^2 + v^2 = d^2.$$

Az első két egyenletből:

$$v^2 - u^2 = a^2 - b^2,$$

a másik kettőből:

$$v^2 - u^2 = d^2 - c^2.$$

A bal oldalak egyenlőségéből következik a jobb oldalak egyenlősége, azaz

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2.$$

Innen

$$d^2 = a^2 + c^2 - b^2.$$

Úgy kell tehát megválasztanunk az adott oldalakat, hogy $d^2 > 0$ legyen.

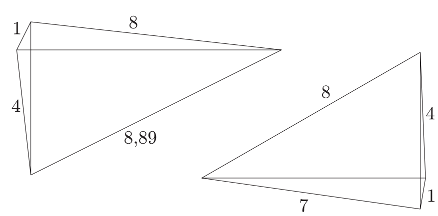
Ez két esetben teljesül: ha $a = 8$, $c = 4$ és $b = 1$, ekkor

$$d = \sqrt{64 + 16 - 1} = \sqrt{79} \approx 8{,}89;$$

vagy $a = 8$, $c = 1$ és $b = 4$, ekkor

$$d = \sqrt{64 + 1 - 16} = 7.$$

Ilyen négyszögek valóban léteznek, ezt mi nem bizonyítjuk, bár ez hozzátartozna a feladat megoldásához. Ezt versenyzőinktől sem vártuk el.



Megjegyzések. 1. A megoldások lényegében azt használták fel, hogy a merőleges átlójú négyszögek esetében a szemközti oldalpárok hosszainak négyzetösszege ugyanannyi. (Ha az oldalak ebben a sorrendben a, b, c, d, akkor $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.) Ebből az összefüggésből számolták ki a negyedik oldalt.

Ahhoz, hogy az összefüggés alapján meghatározott négyszög átlói merőlegesek, azt is be kellene látni, hogy az $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ összefüggésből következik az átlók merőlegessége. Legyenek A, B, C, D a négyszög csúcsai és legyen AC az egyik átló. A B és D csúcsokból erre bocsátott merőlegesek talppontja legyen P és Q úgy, hogy P van az A-hoz közelebb. Legyen $|AP| = x$, $|PQ| = z$ és $|QB| = y$. A talppontoknak a megfelelő csúcstól mért távolságai legyenek u és v. Ekkor Pitagorasz tétele szerint a szemköztes oldalpárok hosszának négyzetösszegei $x^2 + u^2$ és $y^2 + v^2$, illetve $(x + z)^2 + v^2$ és $(z + y)^2 + u^2$. Így az

$$\left(x^2 + u^2\right) + \left(y^2 + v^2\right) = \left((x + z)^2 + v^2\right) + \left((z + y)^2 + u^2\right)$$

egyenlőséget nyerjük. Ebből $0 = 2z(x + y) + 2z^2$ következik. Innen $z = 0$, vagyis a két merőleges talppontja egybeesik, tehát a két átló merőleges egymásra.

2. Könnyen belátható, hogy a fenti gondolatmenet konkáv négyszög esetében is alkalmazható.

3. A keresett d oldallal szemben elvileg a, b, c bármelyike lehetne. A szimmetria miatt ez három megoldást adhatna. Ha például a van szemben, akkor $d^2 = b^2 + c^2 - a^2$. Ez kell, hogy pozitív legyen, mert $d^2 > 0$. A $b^2 + c^2 - a^2$ kifejezés biztosan pozitív, hacsak nem $a > b, c$. Ebben az esetben is pozitív, amennyiben $a^2 < b^2 + c^2$. Ez azt is jelentheti, hogy a^2, b^2, c^2 egy háromszög oldalai. Ekkor van három eset; egyébként kettő.