Nagy Csaba megoldása. A feladat kérdésére a válasz: $3n$. Ennyi sík valóban elegendő, például az $x+y+z=1$, $x+y+z=2$, ..., $x+y+z=3n$ egyenletű síkok megfelelnek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy néhány síkkal lefedtük S-et, az origót azonban nem. Megmutatjuk, hogy a síkok száma legalább $3n$. Írjuk föl a síkok egyenletét $ax+by+cz+d=0$ alakban (ahol a, b, c nem mind nulla). Szorozzuk össze az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket; egy $p(x,y,z)$ polinomot kapunk, ami S pontjaiban nulla, az origóban pedig nem. Igazolnunk kell, hogy p foka legalább $3n$. Ehelyett a következő, általánosabb állítást látjuk be:

a, b, c természetes számok, és legyen

$$S(a,b,c)=\big\{(x,y,z)\mid x\in\{0,1,\dots,a\},\ y\in\{0,1,\dots,b\},\\ z\in\{0,1,\dots,c\},\ x+y+z>0\big\}.$$

Ha az $f(x,y,z)$ polinom $S(a,b,c)$ pontjaiban nulla, a $(0,0,0)$ pontban pedig nem, akkor a foka legalább $a+b+c$.

A bizonyítást az $(a+b+c)$-re vonatkozó indukcióval végezzük. Ha $a+b+c=1$, akkor a polinom legalább elsőfokú (azaz nem konstans), hiszen felvesz két különböző értéket. Ha $a+b+c>1$, akkor tekintsünk egy, a feltételeknek megfelelő f polinomot, a fokát jelölje t. Az a, b, c számok között létezik pozitív, legyen ez például a. Képezzük a $g(x,y,z)=f(x+1,y,z)-f(x,y,z)$ polinomot. A g polinom foka nyilván legfeljebb t; viszont $f(x+1,y,z)$-ben és $f(x,y,z)$-ben ugyanazok a megfelelő t-edfokú tagok együtthatói, így ezek kiejtik egymást g-ben. A g foka ezért legfeljebb $t-1$. A g polinom az $S(a-1,b,c)$ halmaz pontjaiban nulla, az origóban viszont nem nulla; az indukciós feltevés szerint tehát g foka legalább $a-1+b+c$, amiből $t-1\ge a-1+b+c$, azaz $t\ge a+b+c$ következik.