Lovász László Miklós megoldása. (a) Mivel $\max\{a_j\colon 1 \le j \le i\} \ge a_i$, és $\min\{a_j\colon i \le j \le n\} \le a_i$, nyilván $d_i \ge 0$. Jelöljön k egy olyan indexet, amelyre $d = d_k$; hasonlóan, legyen $a_\ell = \max\{a_j\colon 1 \le j \le k\}$ és $a_m = \min\{a_j\colon k \le j \le n\}$. Tegyük fel, hogy a feladat állításával ellentétben léteznek olyan $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ valós számok, amelyekre $|x_i - a_i| < \frac{d}{2}$, minden $i \le n$-re. Ekkor azonban az

$$a_\ell - x_\ell \le |x_\ell - a_\ell| < \frac{d}{2}, \qquad x_m - a_m \le |x_m - a_m| < \frac{d}{2}$$

egyenlőtlenségek összege: $a_\ell - a_m + x_m - x_\ell < d$.

Másrészt $\ell \le k \le m$ miatt $\ell \le m$, és ezért $x_m \ge x_\ell$. Így viszont $a_\ell - a_m + x_m - x_\ell = d_k + x_m - x_\ell \ge d$, ami az előbbi egyenlőtlenségnek ellentmond.

(b) Minden $1 \le i \le n$ indexre legyen

$$x_i = \frac{\max\{a_j\colon 1 \le j \le i\} + \min\{a_j\colon i \le j \le n\}}{2}.$$

Ez az x_i sorozat valóban növekedő, mivel az összeg mindkét tagja monoton növő az i függvényében: bővebb számhalmaz maximuma legalább akkora, mint a szűkebbé, egy halmazt szűkítve pedig a minimum ugyancsak nő. Az $A_i = \max\{a_j\colon 1 \le j \le i\}$ és $B_i = \min\{a_j\colon i \le j \le n\}$ jelölésekkel $A_i \ge a_i \ge B_i$, $d_i = A_i - B_i$, így

$$x_i - a_i \le x_i - B_i = \frac{A_i + B_i}{2} - B_i = \frac{A_i - B_i}{2} = \frac{d_i}{2},$$

$$a_i - x_i \le A_i - x_i = A_i - \frac{A_i + B_i}{2} = \frac{A_i - B_i}{2} = \frac{d_i}{2}.$$

Tehát minden i-re $|x_i - a_i| \le \frac{d_i}{2} \le \frac{d}{2}$, azaz $\max\left\{|x_j - a_j|\colon 1 \le j \le n\right\} \le \frac{d}{2}$; az ($a$)-ban kapott általános becsléssel összevetve ez igazolja, hogy a választott x_i számok mellett ($*$)-ban egyenlőség áll.