1.1. kérdés. Bármilyen alkalmas egyenlet felhasználásával megkaphatjuk a kérdéses mennyiségek dimenzióját. Például a következő kínálkozó lehetőségekkel élhetünk:

I) A Planck-összefüggés alapján:

$$h\nu = E \;\Rightarrow\; [h][\nu] = [E] \quad \Rightarrow \quad [h] = [E]\cdot[\nu]^{-1} = ML^2T^{-1}.$$

II) $[c] = LT^{-1}$.

III) A tömegvonzási törvény alapján:

$$F = \gamma\frac{m_1\cdot m_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad [G] = [F][r]^2[m]^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

IV) Az ekvipartíció tétel segítségével: $E = \frac{1}{2}k_\mathrm{B}\theta$, ahol θ-val jelöltük a hőmérsékletet. Ennek alapján $[k_\mathrm{B}] = [E][\theta]^{-1} = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1.2. kérdés. Például a Stefan–Boltzmann-törvény felhasználásával:

$$\frac{\text{Teljesítmény}}{\text{Felület}} = \sigma\cdot\theta^4,$$

amiből $[\sigma]K^4 = [E]L^{-2}T^{-1} \;\Rightarrow\; [\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$.

1.3. kérdés. Egy számfaktortól eltekintve a Stefan–Boltzmann-állandó a következő alakban írható fel: $\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_\mathrm{B}^\delta$, ahol α, β, γ és δ értékét dimenzióanalízissel állapítjuk meg: $[\sigma] = [h]^\alpha[c]^\beta[G]^\gamma[k_\mathrm{B}]^\delta$, ahol például $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$. Szép sorjában írjuk be az összes dimenziót:

$$\begin{aligned} MT^{-3}K^{-4} &= \left(ML^2T^{-1}\right)^\alpha\left(LT^{-1}\right)^\beta\left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\gamma\left(ML^2T^{-2}K^{-1}\right) = \\ &= M^{\alpha-\gamma+\delta}L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta}T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta}K^{-\delta}. \end{aligned}$$

A hatványkitevők egybevetéséből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \alpha-\gamma+\delta &= 1 \\ 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta &= 0 \\ -\alpha-\beta-2\gamma-2\delta &= -3 \\ -\delta &= -4 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= -3, \\ \beta &= -2, \\ \gamma &= 0, \\ \delta &= 4, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad \sigma = \frac{k_\mathrm{B}^4}{c^2h^3}.$$

2.1. kérdés. Az eseményhorizont A területe a fekete lyuk m tömegétől, a c fénysebességtől és a G egyetemes gravitációs állandótól függ: $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$. A dimenzióanalízis módszere már a könyökünkön jön ki:

$$\begin{aligned} &[A] = [G]^\alpha[c]^\beta[m]^\gamma \quad\Rightarrow \\ \Rightarrow\quad &L^2 = \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\alpha\left(LT^{-1}\right)^\beta(M)^\gamma = M^{-\alpha+\gamma}L^{3\alpha+\beta}T^{-2\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Most csak három ismeretlent tartalmaz az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha+\gamma &= 0 \\ 3\alpha+\beta &= 2 \\ -2\alpha-\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= 2, \\ \beta &= -4, \\ \gamma &= 2, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad A = \frac{m^2G^2}{c^4}.$$

2.2. kérdés. Az entrópia $dS = dQ/\theta$ termodinamikai definíciója (dQ a hőközlés mértéke, θ pedig a rendszer abszolút hőmérséklete) alapján az entrópia dimenziója: $[S] = [E][\theta]^{-1} = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

2.3. kérdés. Az η állandó dimenzióját Bekenstein nyomán ($\eta = S/A$), valamint az alapvető fizikai állandók (h, c, G és k_B) függvényeként így fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} &[\eta] = [S][A]^{-1} = MT^{-2}K^{-1}, \\ &[\eta] = [G]^\alpha[h]^\beta[c]^\gamma[k_\mathrm{B}]^\delta = M^{-\alpha+\beta+\delta}L^{3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta}T^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta}K^{-\delta}. \end{aligned}$$

A hatványkitevők összevetése megint négyismeretlenes egyenletrendszerrel örvendeztet meg minket, ami azonban csak három ismeretlennel bír:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha+\beta+\delta &= 1 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta &= 0 \\ -2\alpha-\beta-\gamma-2\delta &= -2 \\ \delta &= 1 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= -1, \\ \beta &= -1, \\ \gamma &= 3, \\ \delta &= 1, \end{aligned} \quad \text{vagyis} \quad \eta = \frac{c^3k_\mathrm{B}}{Gh}.$$

A továbbiakban már nem kell használnunk a dimenzióanalízis módszerét, ami nagy öröm, mert mostanra még a legelszántabbak is valószínűleg megcsömörlöttek tőle.

3.1. kérdés. A termodinamika első főtétele alapján $dE = dQ + dW$, ahol közelítésként feltesszük, hogy $dW = 0$. Az entrópia $dS = dQ/\theta$ definícióját felhasználva ezt kapjuk: $dE = \theta_{\mathrm{H}}\, dS + 0$.

Használjuk fel, hogy $S = \dfrac{Gk_B}{ch} m^2$, $E = mc^2$. Így a fekete lyuk Hawking-hőmérsékletére a következő összefüggést kapjuk:

$$\theta_{\mathrm{H}} = \frac{dE}{dS} = \left(\frac{dS}{dE}\right)^{-1} = c^2 \left(\frac{dS}{dm}\right)^{-1}.$$

Elvégezve a deriválást, megkapjuk a végeredményt:

$$\theta_{\mathrm{H}} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{c^3 h}{Gk_B} \cdot \frac{1}{m}.$$

Megjegyezzük, hogy a végeredményben található 1/2-es faktornak nincs jelentősége, elhagyható, csak a deriválás miatt maradt az összefüggésben.

3.2. kérdés. A Stefan–Boltzmann-törvény az egységnyi felületre jutó kisugárzott teljesítményt adja meg. Figyelembe véve az $E = mc^2$ összefüggést is, a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\sigma\theta_{\mathrm{H}}^4 A \\ \sigma &= \frac{k_{\mathrm{B}}^4}{c^2 h^3} \\ A &= \frac{m^2 G^2}{c^4} \\ E &= mc^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c^2 \frac{dm}{dt} = -\frac{k_{\mathrm{B}}^4}{c^2 h^3} \left(\frac{c^3 h}{2Gk_B} \cdot \frac{1}{m}\right)^4 \frac{m^2 G^2}{c^4}.$$

Az egyszerűsítések elvégzése után:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16} \frac{c^4 h}{G^2} \cdot \frac{1}{m^2}.$$

3.3. kérdés. A változók szétválasztásával a következő integrált végezhetjük el:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{16} \frac{c^4 h}{G^2} \frac{1}{m^2} \quad \Rightarrow \quad \int m^2\, dm = -\int \frac{c^4 h}{16G^2}\, dt \quad \Rightarrow \quad m^3(t) - m^3(0) = -\frac{3c^4 h}{16G^2} t.$$

Amikor a fekete lyuk $t = t^*$-kor teljesen elpárolog:

$$m(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{16G^2}{3c^4 h} m^3.$$

3.4. kérdés. A fekete lyuk C_V hőkapacitása megmutatja, hogy a θ hőmérséklet egységnyi megváltozásához mekkora E energiaváltozás tartozik:

$$\left.\begin{aligned} C_V &= \frac{dE}{d\theta} \\ E &= mc^2 \\ \theta &= \frac{c^3 h}{2Gk_B} \frac{1}{m} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_V = -\frac{2Gk_B}{ch} m^2.$$

4.1. kérdés. Újra a Stefan–Boltzmann-törvény adja meg a fekete lyuk egységnyi felületének energiaveszteségi ütemét. A fekete lyuk kozmikus háttérsugárzás miatti energia nyereségét egy hasonló összefüggés írja le. Ezt úgy láthatjuk be, hogy termikus egyensúlyban a teljes energia változásnak el kell tűnnie. Ebből az következik, hogy az energia nyereség ütemét a Stefan–Boltzmann-törvénnyel teljesen megegyező formula jellemzi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\sigma\theta^4 A + \sigma\theta_B^4 A \\ E &= mc^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2} \frac{1}{m^2} + \frac{G^2}{c^8 h^3} (k_{\mathrm{B}}\theta_B)^4 m^2.$$

4.2. kérdés. Vegyük a $\dfrac{dm}{dt} = 0$ esetet:

$$-\frac{hc^4}{16G^2} \frac{1}{m^{*2}} + \frac{G^2}{c^8 h^3} (k_{\mathrm{B}}\theta_B)^4 m^{*2} = 0, \quad \text{amiből} \quad m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B} \frac{1}{\theta_B}.$$

4.3. kérdés.

$$\theta_B = \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{m^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}}\right).$$

4.4. kérdés. Használjuk fel a 4.2. és a 3.1. részkérdésekre adott válaszeredményeket:

$$m^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{\theta_B} \quad \text{és} \quad \theta^* = \frac{c^3 h}{2Gk_B}\frac{1}{m^*} = \theta_B.$$

Úgy is érvelhetünk, hogy m^* felel meg a termikus egyensúlynak. Így $m = m^*$ esetén a fekete lyuk hőmérséklete θ_B. Az is elfogadható megoldás, hogy termikus egyensúly esetén

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma\big(\theta^{*4} - \theta_B^4\big)A = 0, \quad \text{amiből} \quad \theta^* = \theta_B.$$

4.5. kérdés. A 4.3. eredmény alapján megmutatható, hogy az egyensúly instabil:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{m^4}{m^{*4}}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} m > m^* \\ m < m^* \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{dm}{dt} > 0. \\ \dfrac{dm}{dt} < 0. \end{array}$$

Kónya Gábor (aki maximális pontszámra írta meg az elméleti feladatok megoldását) a következő kiegészítéssel látta el dolgozatát a diákolimpián. Munkáját, amelyben dimenzióanalízis nélkül, alapvető fizikai megfontolások segítségével vezeti le a Hawking-probléma kevéssé ismert formuláit, változtatás nélkül közöljük.

$A(m)$, $\theta_{\mathrm{H}}(m)$, $S(m)$ képletek egy alternatív levezetése:

Vegyünk egy p impulzusú fotont a fekete lyukban, a középponttól r távolságra. A foton teljes energiája:

$$pc - G\frac{\frac{p}{c}m}{r} \le 0 \quad \Rightarrow \quad r \le \frac{Gm}{c^2}.$$

Az eseményhorizont sugara és felülete:

$$R = \frac{Gm}{c^2} \quad \text{és} \quad A = 4\pi R^2 = 4\pi\frac{G^2m^2}{c^4} \approx \frac{G^2m^2}{c^4}.$$

Az R sugarú gömbbe zárt foton impulzusát a határozatlansági relációból $p = \dfrac{\hbar}{R}$-nek becsülhetjük. Egy foton mozgási energiája:

$$pc = \frac{\hbar c}{R} = \frac{\hbar c^3}{Gm} \approx \frac{hc^3}{Gm}.$$

A rendszer hőmérséklete: $\theta_{\mathrm{H}} \approx \dfrac{pc}{k} = \dfrac{hc^3}{Gkm}$ (ekvipartíció-tétel). A rendszer entrópiája:

$$S = \int \frac{d(mc^2)}{\theta_{\mathrm{H}}} = \frac{Gk}{hc}\cdot\frac{1}{2}m^2 \approx \frac{Gk}{hc}\cdot m^2.$$

$\eta = \dfrac{S}{A} = \dfrac{kc^3}{hG} = \text{állandó}.$

Az eredmények megegyeznek a dimenzióanalízissel kaphatókkal, de az $S \sim A$ összefüggést bizonyítottuk, nem feltételeztük.