1.1. kérdés. A kondenzátorlemezre felírva a Gauss-törvényt megkapjuk a térerősséget: $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$. A térerősséget a két kondenzátorlemezen lévő töltés együttesen hozza létre, így mindkét lemez hozzájárulása $\frac{1}{2}E$. Ennek alapján a lemezek közt ható erő:

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{2}EQ = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

1.2. kérdés. A Hooke-törvény alapján a rugóerő: $F_\mathrm{m} = -kx$. Az előző kérdésben levezettük a lemezek közt ható elektromos erőt: $F_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$. A rendszer egyensúlyában $F_\mathrm{m} + F_\mathrm{e} = 0$, amiből $x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k}$.

1.3. kérdés. A térerősség a kondenzátorlemezek között homogén, így a lemezek közötti V potenciálkülönbség egyszerűen számolható: $V = E(d-x)$. Behelyettesítve az előző részekben kapott eredményeket, kapjuk:

$$V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd}\right).$$

1.4. kérdés. A C kapacitás a töltés és a potenciálkülönbség hányadosa: $C = \frac{Q}{V}$. Felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt:

$$\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 Akd}\right)^{-1}.$$

1.5. kérdés. A rugóban tárolt mechanikai energia $U_\mathrm{m} = \frac{1}{2}kx^2$, a kondenzátorban tárolt elektromos energia pedig $U_\mathrm{E} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. Így a rendszerben tárolt teljes energia

$$U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 Akd}\right).$$

2.1. kérdés. Adott x érték esetén az egyes kondenzátorok töltése egyszerűen számolható:

$$Q_1 = VC_1 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d-x}, \qquad Q_2 = VC_2 = \frac{\varepsilon_0 AV}{d+x}.$$

2.2. kérdés. Ne felejtsük el, hogy két kondenzátorunk van. Felhasználva az 1.1. kérdésre kapott választ, az egyes kondenzátorokban fellépő erő

$$F_1 = \frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0 A}, \qquad F_2 = \frac{Q_2^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Mivel a két erő ellentétes irányú, az eredő erő

$$F_\mathrm{e} = F_1 - F_2 = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2}\left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right).$$

2.3. kérdés. Elhanyagolva az x^2-rendű tagokat, kapjuk:

$$F_\mathrm{e} = \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}x.$$

2.4. kérdés. Két, k rugóállandójú rugó van sorba kapcsolva, így az eredő mechanikai erő $F_\mathrm{m} = -2kx$. Az elektromos és a mechanikai erő ellentétes irányú, így, felhasználva az előző kérdésre kapott eredményt, az eredő erő

$$F = F_\mathrm{m} + F_\mathrm{e} = -2\left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3}\right)x, \quad \text{ebből pedig} \quad k_\mathrm{eff} = 2\left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3}\right).$$

2.5. kérdés. Felhasználva Newton II. törvényét és az előző eredményt

$$a = -\frac{2}{m}\left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3}\right)x.$$

3.1. kérdés. Írjuk fel az áramkörre a Kirchhoff-törvényeket!

$$\frac{Q_K}{C_K}+V-\frac{Q_2}{C_2}=0, \quad -\frac{Q_K}{C_K}+V-\frac{Q_1}{C_1}=0, \quad Q_2-Q_1+Q_K=0.$$

Felhasználva, hogy $V_K=\dfrac{Q_K}{C_K}$, kapjuk:

$$V_K=V\frac{\dfrac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2-x^2}}{C_K+\dfrac{2\varepsilon_0 Ad}{d^2-x^2}}.$$

3.2. kérdés. Elhanyagolva az x^2-rendű tagokat, kapjuk:

$$V_K=V\frac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2C_K+2\varepsilon_0 Ad}.$$

4.1. kérdés. Az elektromos és a mechanikai erő hányadosa

$$\frac{F_e}{F_m}=\frac{\varepsilon_0 AV^2}{k_{\text{eff}}d^3}.$$

Behelyettesítve a numerikus értékeket

$$\frac{F_e}{F_m}=7{,}6\times 10^{-9}.$$

Az elektromos erők valóban elhanyagolhatók a rugóerők mellett.

4.2. kérdés. Az előzőek szerint elegendő a rugóerőt figyelembe vennünk: $F=2kx$. Így a gyorsuló (lassuló) rendszerben a mozgó lemez egyensúlyi elmozdulása $x=\dfrac{ma}{2k}$. A maximális elmozdulás ennek éppen kétszerese, hiszen a mozgó lemez túllendül az egyensúlyi helyzeten:

$$x_{\max}=2x, \qquad x_{\max}=\frac{ma}{k}.$$

4.3. kérdés. Ha a gyorsulás $a=g$, a maximális elmozdulás

$$x_{\max}=\frac{mg}{k}.$$

Továbbá felhasználva a 3.2. kérdésre kapott eredményt:

$$V_K=V\frac{2\varepsilon_0 Ax_{\max}}{d^2C_K+2\varepsilon_0 Ad}.$$

Kifejezve C_K-t, és felhasználva, hogy $V_K=0{,}15$ V,

$$C_K=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{Vx_{\max}}{V_K d}-1\right), \qquad C_K=8{,}0\times 10^{-11}\ \text{F}.$$

4.4. kérdés. Legyen ℓ a vezető feje és a kormány közötti távolság. Ennek becsült értéke $\ell=0{,}4\ \text{m}-1\ \text{m}$.

Abban a pillanatban, amikor a lassulás elkezdődik, a vezető fejének az autóhoz viszonyított relatív sebessége nulla. $\Delta v(t=0)=0$, így

$$\ell=\frac{1}{2}gt_1^2, \qquad t_1=\sqrt{\frac{2\ell}{g}}, \qquad t_1=0{,}3\ \text{s}-0{,}5\ \text{s}.$$

4.5. kérdés. A t_2 idő a harmonikus rezgést végző lemez periódusidejének fele: $t_2=\dfrac{T}{2}$, a periódusidő:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

így $t_2=0{,}019$ s.

Mivel $t_1>t_2$, a légzsák időben aktiválódik.

Megjegyzés a feladathoz: A gyakorlatban valóban ilyen elven működő gyorsulásmérők aktiválják az autók légzsákját. A valóságos és a feladatban szereplő eszközök között a legfontosabb különbség a méretekben van! A kereskedelemben kapható gyorsulásérzékelők integrált áramköri technológiával készülnek, a miniatürizált mechanikai alkatrészek és az elektronika ugyanazon az egy-két mm^2 felületű félvezető csipen kerülnek kialakításra. Az apró és olcsó (néhány dolláros) eszközöket egyre több helyen használják rezgések mérésére és szabályozására; segítségükkel például csökkenthető a mosógépek centrifugálás közben fellépő rezonanciája.