Megoldás. Írjuk fel a Kirchhoff-törvényeket a feladatban szereplő áramkörre! Ha az áramerősségeket az *ábrán* látható „hurokáramok" segítségével adjuk meg, akkor a csomóponti törvények automatikusan teljesülnek, a huroktörvények pedig az alábbi egyenleteket adják:

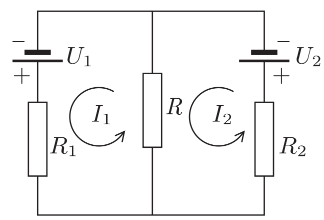
$$I_1R_1 + (I_1 - I_2)R - U_1 = 0, \tag{1}$$

$$(I_2 - I_1)R + I_2R_2 + U_2 = 0. \tag{2}$$

Ezt a lineáris egyenletrendszert megoldva

$$I_1 = \frac{U_1R - U_2R + U_1R_2}{R_1R_1 + R_1R + R_2R} \qquad \text{és} \qquad I_2 = \frac{U_1R - U_2R - U_2R_1}{R_1R_1 + R_1R + R_2R}$$

adódik.



Az R ellenállású fogyasztón összesen

$$I = I_1 - I_2 = \frac{U_1R_2 + U_2R_1}{R_1R_1 + R_1R + R_2R}$$

áram folyik keresztül, a fogyasztóra jutó teljesítmény tehát

$$P = I^2R = \frac{(U_1R_2 + U_2R_1)^2}{(R_1 + R_2)^2R + 2R_1R_2(R_1 + R_2) + \dfrac{R_1^2R_2^2}{R}}.$$

Ez a kifejezés (R függvényében) akkor maximális, ha a nevező minimális, az pedig (mivel a középső tagja nem függ R-től)

$$f(R) = (R_1 + R_2)^2R + \frac{R_1^2R_2^2}{R}$$

legkisebb értékénél teljesül.

Alkalmazzuk f-re a számtani és a mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2}f = \frac{(R_1 + R_2)^2R + \dfrac{R_1^2R_2^2}{R}}{2} \geq \sqrt{(R_1 + R_2)^2R \cdot \frac{R_1^2R_2^2}{R}} = (R_1 + R_2)R_1R_2.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $(R_1 + R_2)^2R = \dfrac{R_1^2R_2^2}{R}$, vagyis ha a fogyasztó ellenállása

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2},$$

ami az áramforrások belső ellenállásainak soros eredője.