I. megoldás. A binomiális tétel szerint:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sqrt{2}^i\sqrt{3}^{n-i}.$$

Vegyük észre, hogy ha n páratlan, akkor az előbbi összeg mindegyik tagja $a_i\cdot\sqrt{2}$ (ha i páratlan), vagy $a_i\cdot\sqrt{3}$ (ha i páros) alakú, ahol minden $0\le i\le n$-re a_i egész szám. Fejtsük ki $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$-t $n=1$-re és $n=3$-ra, abban bízva, hogy a kapott egyenletekből ki tudjuk fejezni $\sqrt{2}$-t $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^1$ és $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3$ racionális együtthatós kombinációjaként:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^1=\sqrt{2}+\sqrt{3},$$
$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3=2\sqrt{2}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{3}=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}.$$

A két egyenlet összevetéséből

$$\sqrt{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3-9\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2}$$

adódik, következésképpen a

$$p(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x$$

racionális együtthatós polinom megoldása a feladatnak, hiszen a fentiek szerint $p\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}$.

II. megoldás. Mivel $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ előáll $q\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ alakban, ahol q racionális együtthatós polinom, nevezetesen: $q(x)=\dfrac{x^2-5}{2}$. Ha $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, akkor

$$x\cdot\frac{x^2-5}{2}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}+\sqrt{18}=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}.$$

Az $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ egyenlőség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sqrt{2}=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=x\cdot\frac{x^2-5}{2}-2x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x.$$

Tehát a

$$p(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x$$

polinom megfelel a feltételeknek.

Megjegyzés. Vizsgáljuk meg, melyek azok a racionális együtthatós p polinomok, amelyekre $p\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}$. Némi számolással igazolható, hogy az 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ számok a racionális számtest felett lineárisan függetlenek, azaz, ha r_1, r_2, r_3, r_4 racionális számokra

$$r_1\cdot 1+r_2\cdot\sqrt{2}+r_3\cdot\sqrt{3}+r_4\cdot\sqrt{6}=0,$$

akkor szükségképpen $r_1=r_2=r_3=r_4=0$. Ha $p(x)$ legfeljebb harmadfokú, akkor $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, ahol a, b, c, d racionális számok. Pontosan akkor teljesül, hogy

$$p\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}=a\left(11\sqrt{2}+9\sqrt{3}\right)+b\left(5+2\sqrt{6}\right)+c\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+d-\sqrt{2}=$$
$$=(5b+d)\cdot 1+(11a+c-1)\sqrt{2}+(9a+c)\sqrt{3}+2b\sqrt{6}=0,$$

ha $5b+d=11a+c-1=9a+c=2b=0$. Ennek az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van: $a=\dfrac{1}{2}$, $b=0$, $c=-\dfrac{9}{2}$, $d=0$. Azt kaptuk tehát, hogy a legfeljebb harmadfokú polinomok közül pontosan egy teljesíti a feladat feltételeit: $\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{9}{2}x$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ gyöke az x^4-10x^2+1 polinomnak. Legyen most p tetszőleges racionális együtthatós polinom. Osszuk el maradékosan (x^4-10x^2+1)-gyel:

$$p(x)=(x^4-10x^2+1)s(x)+r(x),$$

ahol r és s racionális együtthatós polinomok, r legfeljebb harmadfokú. Az x^4-10x^2+1 polinom választása miatt $p\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=r\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. Tehát p pontosan akkor felel meg a feltételnek, ha r is megfelel. Mivel r legfeljebb harmadfokú, ez azzal ekvivalens, hogy $r(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{9}{2}x$. Az eddigieket összefoglalva, p pontosan akkor elégíti ki a feltételeket, ha

$$p(x)=(x^4-10x^2+1)s(x)+\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x,$$

ahol s tetszőleges racionális együtthatós polinom.