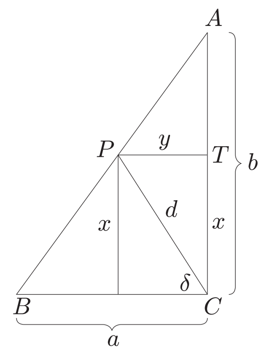
I. megoldás. A szögfüggvények tulajdonságai alapján $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$. Ezt és az *ábra* jelöléseit felhasználva:

$$\frac{\cos\delta}{a} + \frac{\sin\delta}{b} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{a} + \frac{\sin\delta}{b} = \frac{\frac{y}{d}}{a} + \frac{\frac{x}{d}}{b}. \tag{2}$$



Az APT és az ABC háromszögek hasonlóak, és így

$$\frac{TP}{CB} = \frac{AT}{AC}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{y}{a} = \frac{b-x}{b}.$$

Innen $y = \dfrac{b-x}{b} \cdot a$.

Ezt felhasználva (2) jobb oldala tovább alakítható:

$$\frac{\frac{y}{d}}{a} + \frac{\frac{x}{d}}{b} = \frac{\frac{\frac{b-x}{b} \cdot a}{d}}{a} + \frac{\frac{x}{d}}{b} = \frac{b-x}{bd} + \frac{x}{bd} = \frac{b}{bd} = \frac{1}{d}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés. Sokan nem a hasonlóságot, hanem a CPB és az ACP háromszögekre felírt szinusz-tételt használták fel az állítás bizonyításához.

II. megoldás. Az (1) egyenlet mindkét oldalát abd-vel szorozva azt kapjuk, hogy $ab = bd \cdot \cos\delta + ad \cdot \sin\delta$. A bal oldalon álló kifejezés a derékszögű háromszög területének kétszerese. Ha belátjuk, hogy a jobb oldalon is a terület kétszerese áll, akkor készen vagyunk.

A szögfüggvények közti összefüggés szerint $\cos\delta = \sin(90^\circ - \delta)$, így az egyenlet jobb oldala a következőképpen alakul:

$$bd \cdot \sin(90^\circ - \delta) + ad \cdot \sin\delta.$$

Ez valóban a háromszög területének a kétszerese, ugyanis a CBP háromszög területe $\dfrac{ad \cdot \sin\delta}{2}$, a CAP háromszög területe pedig

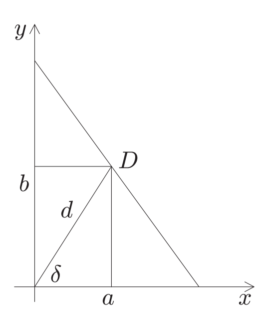
$$\frac{bd \cdot \sin(90^\circ - \delta)}{2} = \frac{bd\cos\delta}{2}.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

III. megoldás. Helyezzük el a derékszögű háromszöget a koordinátarendszerben úgy, hogy a derékszög csúcsa az origóban legyen. Ekkor az átfogó egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

A D pont koordinátái $(d\cos\delta; d\sin\delta)$.



Mivel D illeszkedik az átfogóra, koordinátái kielégítik az átfogó egyenesének egyenletét, vagyis:

$$\frac{d\cos\delta}{a} + \frac{d\sin\delta}{b} = 1.$$

Az egyenlet mindkét oldalát d-vel osztva éppen a bizonyítandó állításhoz jutunk.