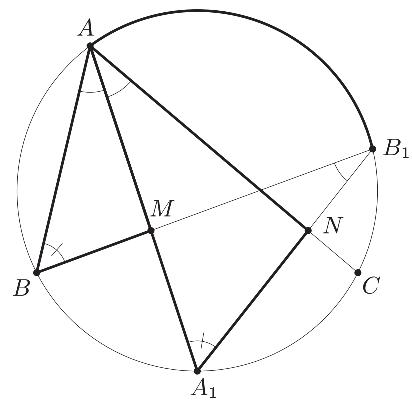
Megoldás. Mivel AA_1 szögfelező, $BAA_1\sphericalangle = CAA_1\sphericalangle$. $ABB_1\sphericalangle = AA_1B_1\sphericalangle$, mert mindkettő az AB_1 ívhez tartozó kerületi szög (*1. ábra*). Tehát az ABM és AA_1N háromszögek hasonlóak, mert két-két szögük egyenlő. Ezért megfelelő oldalaik aránya megegyezik.

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AA_1}{AN}, \quad \text{azaz} \quad AB \cdot AN = AM \cdot AA_1.$$



1. ábra

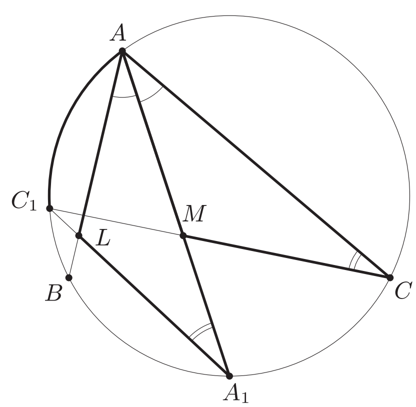
Ugyanígy igazolható, hogy az ACM és az AA_1L háromszögek is hasonlóak (*2. ábra*), mert szintén megegyezik két-két szögük. Ezért

$$\frac{AC}{AM} = \frac{AA_1}{AL}, \quad \text{azaz} \quad AC \cdot AL = AM \cdot AA_1.$$

Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$$AB \cdot AN = AC \cdot AL, \quad \text{vagyis} \quad \frac{AL}{AN} = \frac{AB}{AC}.$$

Így az ALN és az ABC háromszögek A-ra nézve középpontosan hasonlóak, mert az A-ból induló oldalegyeneseik egybeesnek, valamint megegyezik az azokon lévő oldalaik aránya is.



2. ábra

Harmadik oldaluk, LN és BC tehát párhuzamos, ami éppen a bizonyítandó állítás.