I. megoldás. Megmutatjuk, hogy ilyen előállítás nem létezik. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát van olyan $s(x)$ polinom, amelyre $\sin 2x = s(\sin x)$ teljesül minden x valós számra. Az ugyancsak minden valós x-re igaz $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, illetve a $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$ azonosságok felhasználásával kapjuk, hogy ekkor

$$s(\sin x) = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$$

fennáll minden olyan x valós számra, amelyre $\cos x = |\cos x|$. Ez utóbbi nyilván teljesül, ha például $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ezen a halmazon a szinuszfüggvény végtelen sok különböző értéket vesz föl, az értékészlete a $[-1;1]$ intervallum. Az s polinomra tehát teljesülnie kell, hogy minden $y \in [-1;1]$ számra

$$s(y) = 2y\sqrt{1-y^2}. \tag{1}$$

A jobb oldal négyzete egy negyedfokú polinom, így az s polinom négyzete, amely maga is polinom, a $[-1;1]$ intervallumon egyenlő egy negyedfokú polinommal. Ismeretes, hogy ha két polinom végtelen sok helyen ugyanazt az értéket veszi föl, akkor a két polinom azonosan egyenlő. Az s négyzete tehát *egyenlő* egy negyedfokú polinommal, így az s polinom szükségképpen másodfokú.

Ha most (1)-ben az y helyére rendre 0-t, 1-et, majd -1-et helyettesítünk, akkor eredményül mindhárom esetben 0-t kapunk: ez a másodfokú polinom tehát három különböző helyen a 0 értéket veszi föl. Ez nem lehetséges, a szóban forgó polinom tehát nem létezik.

II. megoldás. Tegyük fel most is, hogy $\sin 2x = s(\sin x)$ minden x-re és helyettesítsünk x helyére $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$-et. Az ismert összefüggések felhasználásával ebből azt kapjuk, hogy

$$\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(\pi-2x) = \sin 2x = s\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = s(\cos x).$$

Az s polinomra tehát $\sin 2x = s(\cos x)$ is teljesül minden valós x-re. Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldalán egy *páros* függvény áll, hiszen a belső függvény páros. Az $x \to \sin 2x$ függvény viszont nem páros függvény. Annyira nem az, hogy páratlan; az egyetlen kiút az lehetne, ha azonosan nulla volna, de persze nem az. Valóban nem létezik tehát a keresett előállítás.

Megjegyzések. 1. A második megoldásból valamivel jobban látszik, mi a különbség a látszólag egyenrangú koszinusz-, illetve szinuszfüggvények között: az utóbbi szimmetriáinak a szerkezete akadályozza meg a keresett alakot. Ha az $x \to \cos 2x$ függvény „feltételezett” előállítására alkalmazunk hasonló manővert, akkor a $-\cos 2x = s(\sin x)$ egyenlőséget kapjuk. Ezzel viszont nincsen semmi baj, ugyanis abból, hogy egy összetett függvény (a jobb oldal) *belső* függvénye *páratlan,* az égvilágon semmi nem következik a teljes függvényre.

2. A második megoldásban mintha egyáltalán nem kellett volna hivatkoznunk arra, hogy a szóban forgó s függvény *polinom;* úgy tűnik, ez a bizonyítás azt adja, hogy egyáltalán nincs ilyen függvény. Ahhoz képest, hogy milyen jó kis matematikát csináltunk az első megoldásban, a feladat szövegezése jókora ködösítés; valójában egyszerűbb dologról van szó. Így végül a második megoldás is tömörebben és célratörőbben fogalmazható:

III. megoldás. Tegyük fel, hogy az s olyan *függvény,* amelyre

$$s(\sin x) = \sin 2x$$

minden x-re. Ekkor például $s\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, másrészt $s\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Mivel $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, azért $s\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ értéke egyrészt -1, másrészt 1; ilyen függvény tényleg nincsen.