Megoldás. Az n szám egyértelműen írható fel $n = 3^k \cdot m$ alakban, ahol k nemnegatív egész szám, m pedig 3-mal nem osztható egész szám.

A $2^{3^k} = a$ jelölést bevezetve:

$$4^n + 2^n + 1 = 4^{3^k \cdot m} + 2^{3^k \cdot m} + 1 = a^{2m} + a^m + 1.$$

Igazolni fogjuk, hogy $A = a^2 + a + 1 \mid a^{2m} + a^m + 1$.

Az $a^{\ell+3} - a^\ell = a^\ell \cdot (a^3 - 1) = a^\ell (a-1)(a^2 + a + 1) = a^\ell (a-1)A$ azonosság szerint az a^ℓ szám A-val vett osztási maradékát csak az ℓ kitevő 3-as maradéka határozza meg (ℓ tetszőleges nemnegatív egész szám lehet). Mivel m nem osztható 3-mal, az m és $2m$ közül az egyik 3-as maradéka 1, a másiké pedig 2. Így az $a^{2m} + a^m + 1$ és $a^2 + a + 1$ számok A-val osztva ugyanazt a maradékot adják. Mivel utóbbi éppen A, ez a maradék 0. Tehát $A = a^2 + a + 1$ valóban osztja $a^{2m} + a^m + 1$-et. A feltétel szerint $4^n + 2^n + 1 = a^{2m} + a^m + 1$ prímszám, de osztható az 1-nél nagyobb $a^2 + a + 1$ számmal. Ez csak úgy lehet, ha egyenlők, azaz $m = 1$. Ekkor viszont $n = 3^k \cdot m = 3^k$, tehát n a 3-nak egész kitevőjű hatványa.