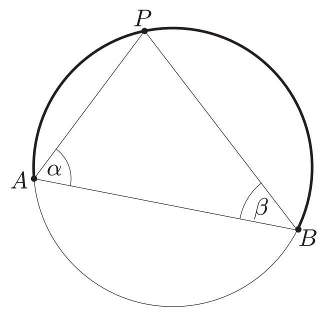
I. megoldás. Az AB szakasz hossza adott, így az ívnek azt a P pontját keressük, amelyre $AP+PB$ maximális. Legyen az APB háromszögben a szokásos betűzés szerint az A csúcsnál α, a B csúcsnál pedig β szög. A háromszög harmadik szöge a kerületi szögek tétele szerint állandó, és így az $\alpha+\beta$ összeg sem függ a P pont helyzetétől (*1. ábra*).



1. ábra

A háromszög oldalai a szinusztétel felhasználásával $AP=2r\sin\beta$, illetve $BP=2r\sin\alpha$, ahol r a háromszög körülírt körének a sugara. Ekkor az ismert összefüggések szerint

$$AP+BP=2r(\sin\alpha+\sin\beta)=4r\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

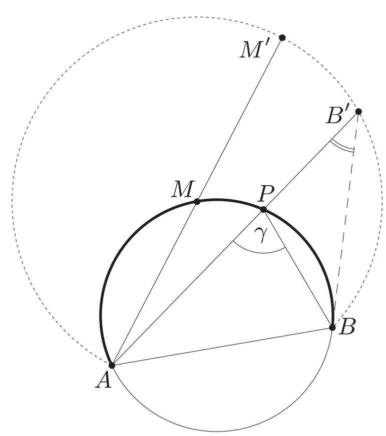
Az AB alapon fekvő két szög összege állandó, így ennek fele is az. A fenti, most pozitív tényezőjű szorzat akkor maximális, ha egyetlen változó tényezője, $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ a lehető legnagyobb.

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\le 1$, és mivel α és β egy háromszög szögei, most pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha $\alpha=\beta$. Az ABP háromszög kerülete tehát pontosan akkor maximális, ha P az AB ív felezőpontja, a háromszög egyenlő szárú.

Megjegyzések. 1. Ilyen, vagy hasonló bizonyítást közölt a helyes megoldást küldők többsége. Jellegzetes hibalehetőséget hordozott a megoldásnak az a változata, amely a fenti vagy ahhoz hasonló trigonometrikus kifejezést egyetlen változó, mondjuk az α függvényeként a derivált segítségével vizsgálta. Ennek a kifogástalan végigvitele az elemi útnál hosszadalmasabb, ugyanis túl azon, hogy a derivált nulla helyén ellenőrizni kell, hogy valóban lokális maximumot kaptunk-e, az α-ra adódó intervallum határait is meg kell vizsgálnunk, hiszen ha ezen pontok valamelyikében van a szélsőérték, azt a derivált nem mutatja ki.

2. Érdemes felfigyelni arra, hogy az APB háromszög *területe* is a P talált helyzetében maximális, ez azonban sokkal könnyebben igazolható.

II. megoldás. Jelölje a háromszög P-nél lévő szögét γ, amely állandó az AB ív minden P pontjára. Mérjük föl a BP szakaszt az AP félegyenes P-n túli meghosszabbítására. Az így kapott B' pontra $AB'=AP+PB$, tehát a P-nek azt a helyzetét keressük, amelyre az AB' távolság maximális (*2. ábra*).

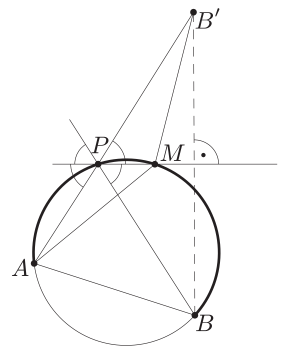


2. ábra

A BPB' háromszög egyenlő szárú, ezért $AB'B\sphericalangle=\dfrac{\gamma}{2}$, a B' pontok az AB szakasz $\dfrac{\gamma}{2}$ szögű látókörén vannak. Ennek a látókörnek a középpontja láthatóan az AB ív M felezőpontja, az AB' szakasz pedig ennek a körnek egy húrja. Mivel egy adott körben a leghosszabb húr az átmérő, azért $AP+PB=AB'\le AM'=2AM=AM+MB$.

III. megoldás. Megmutatjuk, hogy a keresett pont – a várakozásnak megfelelően – az AB ív M felezőpontja. Legyen P az ívnek az M-től különböző tetszőleges pontja. A szimmetria miatt föltehető, hogy a P pont az MA ív belsejében van.

Ismeretes, hogy a PM egyenes felezi az APB háromszög P-beli külső szögét (*3. ábra*). Ebből következik, hogy a B pontnak az MP egyenesre vonatkozó B' tükörképe rajta van az AP félegyenesen. Az AMB' háromszögben a háromszög egyenlőtlenség szerint $AM + MB' > AB' = AP + PB'$. A tükrözés miatt $MB' = MB$ és $PB' = PB$, így $AM + MB > AP + PB$.



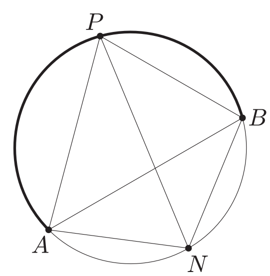
3. ábra

Ez az egyenlőtlenség az AB ív minden M-től különböző P pontjára teljesül, az APB háromszög kerülete tehát akkor maximális, ha P az AB ív felezőpontja.

IV. megoldás. A kör kiegészítő ívének N felezőpontját felvéve tekintsük az $ANBP$ húrnégyszöget (*4. ábra*). A húrnégyszögekre vonatkozó Ptolemaiosz-tételt felírva

$$PN \cdot AB = AN \cdot PB + BN \cdot AP.$$

A jobb oldalon AN és BN közös hossza, a bal oldalon pedig AB állandó. A maximalizálandó $AP + PB$ összeg tehát a PN húrral arányos, és így akkor maximális, ha ez a húr a lehető legnagyobb az adott körben. Ez akkor teljesül, ha a PN húr átmérő, azaz P az AB ív felezőpontja.



4. ábra