**Megoldás.** Felhasználjuk a minden $n$ természetes számra érvényes

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosságot. Eszerint, ha $a$ és $b$ tetszőleges egész számok, akkor $a^n - b^n$ osztható $(a-b)$-vel. Ennek alapján az $a_1 = 1^{2006} - 1004^{2006}$, $a_2 = 2^{2006} - 1005^{2006}$, $a_3 = 3^{2006} - 1006^{2006}$, $\ldots$, $a_{1002} = 1002^{2006} - 2005^{2006}$ különbségek mindegyike osztható 1003-mal. A feladatban szereplő összeg éppen

$$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots - a_{1002}) + 1003^{2006},$$

tehát osztható 1003-mal. Nem osztható viszont 2006-tal, hiszen a páratlan tagok száma 1003; így a szóban forgó alternáló összeg is páratlan.