I. megoldás. Ábrázoljuk az adott pontokat a derékszögű koordináta-rendszerben. Az OA egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szöge legyen α, az OB egyenesnek az x tengellyel bezárt szöge β és a $COA\sphericalangle=\gamma$. A γ szöget a COA háromszögből számíthatjuk ki a koszinusz-tétel felhasználásával:

$$\overline{CA}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OA}\,\overline{OC}\cos\gamma.$$

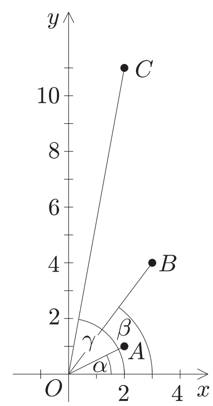
$\overline{CA}=10$, $\overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\overline{OC}=\sqrt{11^2+2^2}=\sqrt{125}$, vagyis

$$100=5+125-2\sqrt{5}\sqrt{125}\cos\gamma,\quad \text{ahonnan}$$

$$\cos\gamma=\frac{3}{5}\qquad (\text{és } \gamma\approx 53{,}13^\circ).$$

Innen

$$1+\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{1}{\cos^2\gamma}=\frac{25}{9},\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{4}{3}.$$



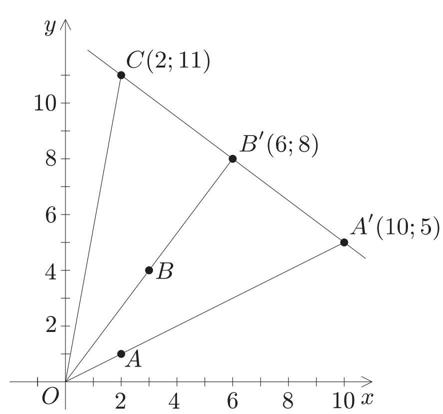
$BOA\sphericalangle=\beta-\alpha$, és $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{4}{3}$. Az ismert $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}$ összefüggés alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\,(\beta-\alpha)=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},$$

(innen $BOA\sphericalangle=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\approx 26{,}57^\circ$) és

$$\operatorname{tg}\big(2(\beta-\alpha)\big)=\frac{2\operatorname{tg}\,(\beta-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\beta-\alpha)}=\frac{4}{3}=\operatorname{tg}\gamma,\quad \text{tehát}\quad \gamma=2(\beta-\alpha).$$

II. megoldás. Tekintsük a $2B=B'(6;8)$ és az $5A=A'(10;5)$ koordinátájú pontokat. Nyilván B' az OB, A' az OA félegyenesen vannak. Azt állítjuk, hogy az A', B', C pontok egy egyenesen sorakoznak. Állításunk következik abból, ha megmutatjuk, hogy B' az $A'C$ szakasz felezőpontja. Valóban $\dfrac{2+10}{2}=6$, és $\dfrac{11+5}{2}=8$.



Számítsuk ki az OC és OA' szakaszok hosszát: $\overline{OC}=\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{125}$, $\overline{OA'}=\sqrt{10^2+5^2}=\sqrt{125}$. Az $OA'C$ háromszög tehát egyenlő szárú, OB' e háromszög O csúcsát az alap felezőpontjával összekötő szakasz. Az egyenlő szárú háromszög alaptulajdonságaiból következik, hogy OB' felezi a COA' szöget, s ezt akartuk bizonyítani.