I. megoldás. A törtek a kezdeti feltétel második része miatt mindig értelmezve vannak. Hozzunk közös nevezőre mindkét oldalon:

$$a^7 \cdot \frac{(1+a)^2-(1-a)^2}{(1-a)^2(1+a)^2} = b^7 \cdot \frac{(1+b)^2-(1-b)^2}{(1-b)^2(1+b)^2}.$$

A számlálókban a műveletek elvégzése után igen egyszerű kifejezések adódnak (a nevezőkben is végezzük el a szorzást):

$$a^7 \cdot \frac{4a}{(1-a^2)^2} = b^7 \cdot \frac{4b}{(1-b^2)^2}.$$

Osszunk 4-gyel és szorozzunk a nevezőkkel:

$$a^8 \cdot (1-b^2)^2 = b^8 \cdot (1-a^2)^2.$$

Mindkét oldalon teljes négyzetek szerepelnek:

$$(a^4b^2-a^4)^2 = (b^4a^2-b^4)^2.$$

A feltételként szereplő azonosságot alkalmazva a zárójeleken belül:

$$\left[a^2(a^2+b^2)-a^4\right]^2 = \left[b^2(b^2+a^2)-b^4\right]^2.$$

A zárójeleken belül a műveleteket elvégezve kapjuk, hogy: $(a^2b^2)^2 = (b^2a^2)^2$, ami nyilvánvalóan igaz, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti állítás is igaz.

II. megoldás. A feladat feltétele szerint $a^2+b^2=a^2b^2$. Ebből b^2-et kifejezve:

(1) $$b^2 = \frac{a^2}{a^2-1}.$$

(a^2-1)-gyel azért oszthatunk, mert $|a| \neq 1$. Ugyanígy

(2) $$a^2 = \frac{b^2}{b^2-1}.$$

Alakítsuk át a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalát:

$$\frac{a^7}{(1-a)^2} - \frac{a^7}{(1+a)^2} = \frac{b^7}{(1-b)^2} - \frac{b^7}{(1+b)^2},$$

$$\frac{a^9+2a^8+a^7-a^9+2a^8-a^7}{\big((1-a)(1+a)\big)^2} = \frac{b^9+2b^8+b^7-b^9+2b^8-b^7}{\big((1-b)(1+b)\big)^2},$$

$$\frac{4a^8}{(a^2-1)^2} = \frac{4b^8}{(b^2-1)^2},$$

$$a^4 \cdot \left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^2 = b^4 \cdot \left(\frac{b^2}{b^2-1}\right)^2.$$

Helyettesítsük be a zárójelben szereplő kifejezések helyére az (1)-ben és (2)-ben kapott értékeket:

$$a^4 \cdot (b^2)^2 = b^4 \cdot (a^2)^2,$$
$$a^4b^4 = a^4b^4,$$

ami azonosság. Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Kicsit módosul a megoldás vége, ha a^2-1, illetve b^2-1 helyére írjuk be a feltételből kapott $\frac{a^2}{b^2}$, illetve $\frac{b^2}{a^2}$ kifejezéseket.

2. Sokan bármiféle megjegyzés nélkül gyököt vontak és $\frac{a^4}{a^2-1} = \frac{b^4}{b^2-1}$-gyel dolgoztak, és kihozták például, hogy $a^2b^2=a^2+b^2$ – ami a feltétel. Ebből ugyan következik a kiinduló állítás, de nem ekvivalens azzal (mint ahogy többen írták). (Ahogy pl. $a^2=b^2$-ből sem következik $a=b$, de $a=b$-ből következik $a^2=b^2$.)