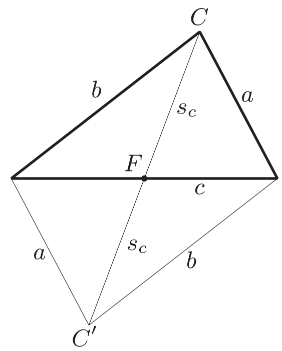
Megoldás. Legyenek a háromszög oldalai $a \leq b \leq c$, a megfelelő súlyvonalak pedig s_a, s_b, s_c. A súlyvonalak négyzetére vonatkozó jól ismert összefüggés szerint

$$4s_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2, \quad 4s_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \quad \text{és} \quad 4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

(ezek könnyen levezethetők abból, hogy bármely paralelogramma oldalainak négyzetösszege megegyezik átlóinak négyzetösszegével, ld. *1. ábra*). Látható, hogy $s_a \geq s_b \geq s_c$. Mivel két háromszög pontosan akkor hasonló, ha megfelelő oldalaik négyzeteinek aránya megegyezik, azért a követelmény teljesülésének szükséges és elégséges feltétele

$$\frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{c^2} = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{b^2} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{a^2}. \tag{1}$$



1. ábra

Ezekből az egyenletekből rendezéssel kapjuk, hogy a

$$2b^2c^2 + 2b^4 - a^2b^2 = 2c^4 + 2a^2c^2 - b^2c^2 \quad \text{és a} \quad 2a^2c^2 + 2a^4 - a^2b^2 = 2a^2b^2 + 2b^4 - b^2c^2$$

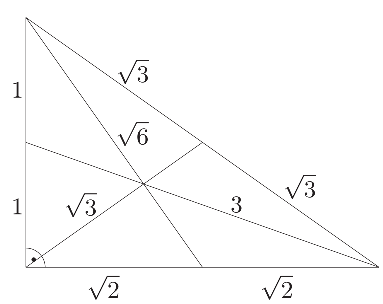
egyenlőségeknek egyszerre kell teljesülniük. A két egyenletet összeadva, rendezés után a

$$0 = a^4 + 2b^2c^2 - c^4 - 2a^2b^2 = (a^2 - c^2)(a^2 + c^2 - 2b^2)$$

egyenlethez jutunk. Ha $a^2 = c^2$, akkor $a = c$, amit az első egyenletbe visszaírva kapjuk, hogy $b = c$, azaz ebben az esetben a háromszög szabályos. Ha $a^2 + c^2 - 2b^2 = 0$, vagyis $a^2 + c^2 = 2b^2$ (ami mellesleg szabályos háromszög esetén is igaz), akkor mindkét (1)-beli egyenlőség fennáll, mert

$$\frac{2c^2 + (a^2 + c^2) - a^2}{c^2} = \frac{2c^2 + 2a^2 - \frac{a^2+c^2}{2}}{\frac{a^2+c^2}{2}} = \frac{2a^2 + (a^2 + c^2) - c^2}{a^2} = 3.$$

Tehát egy háromszög súlyvonalaiból pontosan akkor szerkeszthető hozzá hasonló háromszög, ha a háromszög valamely két oldalának négyzetösszege megegyezik a harmadik oldal négyzetének kétszeresével. Ez a feltétel a szabályos háromszögön kívül teljesül például abban a derékszögű háromszögben, amelynek oldalai 2, $2\sqrt{2}$ és $2\sqrt{3}$ (súlyvonalai pedig $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ és 3).



2. ábra