Megoldás. Jelöljük 2005-öt a-val, 2006-ot b-vel. Ekkor az egyenletek:

$$y = -x + a, \tag{1}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1. \tag{3}$$

Számítsuk ki az egyenesek metszéspontjainak koordinátáit.

Az (1) és (2) egyenletből:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{a} + \frac{-x+a}{b} = 1, \qquad \text{innen}\\
&bx - ax + a^2 = ab,\\
&x(b-a) = ab - a^2,\\
&x = \frac{a(b-a)}{b-a} = a \quad \text{és} \quad y = 0.
\end{aligned}$$

A $P_1(a;0)$ a két egyenes metszéspontja.

Az (1) és (3) egyenesek metszéspontja legyen P_2. Az egyenletek szimmetriájából következik, hogy $P_2(0;a)$.

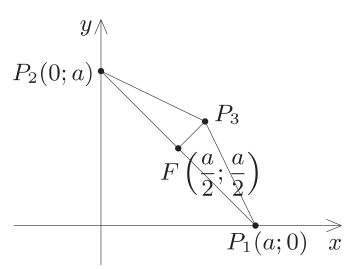
A (2) és (3) egyenesek P_3 metszéspontjának koordinátáit megkapjuk, ha az egyenletrendszert megoldjuk. A (2) egyenletből: $x = \dfrac{ab - ay}{b}$. Helyettesítsük ezt (3)-ba:

$$\begin{gathered}
\frac{ab - ay}{b^2} + \frac{y}{a} = 1,\\
a^2b - a^2y + yb^2 = ab^2, \quad \text{és innen} \quad y = \frac{ab}{a+b}.
\end{gathered}$$

Az egyenletek szimmetriája miatt P_3 x koordinátája ugyanennyi, azaz

$$P_3\left(\frac{ab}{a+b}; \frac{ab}{a+b}\right).$$

A $P_1P_2P_3$ háromszög területét kell meghatározni.



Könnyű belátni, hogy a $P_1P_2P_3$ háromszög egyenlő szárú. Alapja $\overline{P_1P_2}$, az ehhez tartozó magassága P_3-ból indul és felezi a P_1P_2 szakaszt. P_1P_2 felezőpontja F, koordinátái $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

$$\overline{P_1P_2} = a\sqrt{2}, \qquad \overline{P_3F} = \sqrt{2\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{a}{2}\right)^2} = \left(\frac{ab}{a+b} - \frac{a}{2}\right)\sqrt{2}.$$

A terület:

$$T = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a(b-a)}{2(a+b)} \cdot \sqrt{2} = \frac{a^2(b-a)}{2(a+b)}.$$

Írjuk be a és b számértékeit, kapjuk, hogy

$$T = \frac{2005^2}{2(2005+2006)} \approx 501{,}13 \text{ területegység.}$$