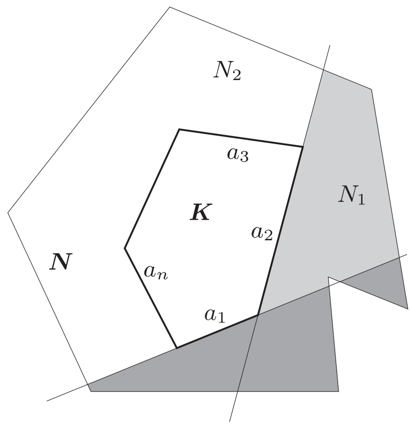
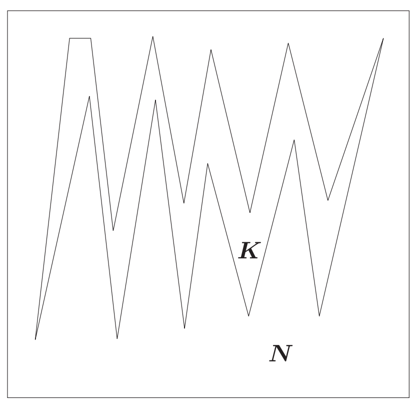
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy ha az $\boldsymbol{N}$ sokszög a belsejében tartalmazza a $\boldsymbol{K}$ konvex sokszöget, akkor $\boldsymbol{N}$ kerülete nagyobb, mint $\boldsymbol{K}$ kerülete. Legyenek $\boldsymbol{K}$ oldalai $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Mivel $\boldsymbol{K}$ konvex, az oldalegyenesei által meghatározott két-két zárt félsík egyike tartalmazza. Mivel $\boldsymbol{K}$ az $\boldsymbol{N}$ belsejében van, az a_1 oldal egyenese $\boldsymbol{N}$-ből egy olyan N_1 sokszöget vág le, amelynek a kerülete kisebb, mint $\boldsymbol{N}$ kerülete, és N_1 tartalmazza $\boldsymbol{K}$-t (*1. ábra*). Ezután az a_2 oldal egyenesével vághatunk le N_1-ből egy olyan N_2 sokszöget, amely szintén tartalmazza $\boldsymbol{K}$-t, kerülete pedig kisebb, mint N_1 kerülete. Ezt az eljárást az $a_3, \ldots, a_n$ oldalakkal folytatva kapjuk az $N_3, \ldots, N_n = \boldsymbol{K}$ sokszögeket, melyeknél N_i kerülete kisebb, mint N_{i-1} kerülete ($i = 1, 2, \ldots, n$). Így $\boldsymbol{N}$ kerülete nagyobb, mint $N_n = \boldsymbol{K}$ kerülete. (Gondolatmenetünkben lényeges volt, hogy $\boldsymbol{K}$ konvex, egy konkáv sokszög kerülete lehet nagyobb, mint az őt tartalmazó sokszög kerülete, lásd a *2. ábrát.*)



1. ábra



2. ábra

Esetünkben tehát $\boldsymbol{K}$ kerülete kisebb, mint az 1 méter oldalú négyzet kerülete, azaz 400 cm. Legyenek $\boldsymbol{K}$ oldalai valamilyen körüljárás szerinti sorrendben $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$. Tekintsük a csúcsok által meghatározott háromszögek közül azokat, melyeknek két oldala $\boldsymbol{K}$ két szomszédos oldala. Ilyen háromszögből 100 darab van, a szomszédos oldalak szerint rendezve őket két-két oldaluk rendre $(b_1; b_2), (b_2; b_3), \ldots, (b_{100}; b_1)$. Ezeknek az oldalpároknak az összhossza éppen $\boldsymbol{K}$ kerületének kétszerese, azaz kisebb, mint 800 cm. Ez viszont azt jelenti, hogy a 100 oldalpár közt van legalább egy, melyben a két oldal hosszának összege kisebb, mint 8 cm. Legyen (b_i, b_{i+1}) egy ilyen oldalpár. Az általuk meghatározott háromszög területe legfeljebb $\dfrac{b_i b_{i+1}}{2}$, hiszen ezt a mennyiséget még a két oldal által bezárt szög szinuszával is meg kell szorozni, hogy a területet megkapjuk. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján:

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 > \left(\frac{b_i + b_{i+1}}{2}\right)^2 \geq b_i b_{i+1},$$

vagyis a háromszög területe kisebb, mint $\dfrac{4^2}{2} = 8\ \text{cm}^2$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Megjegyzés. A feladat állításában szereplő 8 cm^2-es becslésnél jóval erősebb felső korlát is adható a legkisebb háromszög területére. Az **A. 380.** feladat megoldásából (lásd KöMaL 2006/1., 27. oldal) következik, hogy ez a terület legfeljebb 0,51 cm^2.