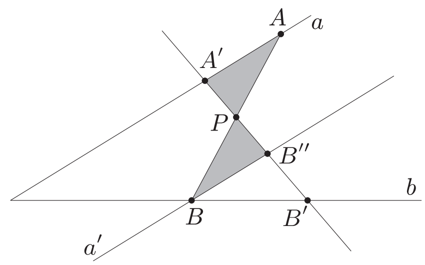
I. megoldás. Jelölje (az egyenesszögnél szükségképpen kisebb) szög szárait a és b, és tükrözzük az a egyenesét az adott P pontra; a kapott a' egyenes messe a b-t B-ben. A B pont P-re való tükörképe (amely nyilván az a szárra esik) legyen A. Az AB az egyetlen olyan, P-n átmenő egyenes, amelynek a szögtartományba eső szakaszát P felezi. Megmutatjuk, hogy ez az egyenes vágja le a legkisebb területű háromszöget a szögtartományból.

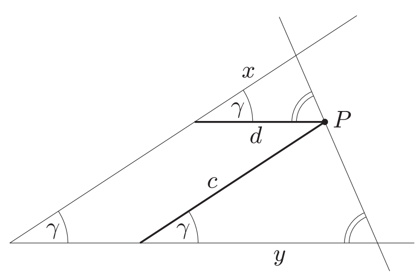


1. ábra

Tekintsünk egy P-n átmenő tetszőleges (az AB-től különböző) egyenest, ami az a, b szögszárakat rendre az A', illetve B' pontokban metszi. Feltehető, hogy például B elválasztja a szög csúcsát B'-től, és ekkor A' elválasztja a szög csúcsát A-tól (ld. *1. ábra*). Ekkor az a egyenes P-re való tükörképe a PB' szakaszt annak egy belső B'' pontjában metszi. A tükrözések miatt a PBB'' háromszög éppen a PAA' háromszög P-re való tükörképe. Ebből következik, hogy a PBB' háromszög területe nagyobb a PAA' háromszög területénél, hiszen valódi módon tartalmazza az azzal egybevágó PBB'' háromszöget. Ez egyben azt is mutatja, hogy az $A'B'$ egyenes nagyobb területű háromszöget vág le a szögtartományból, mint az AB.

Megjegyzés. A fenti megoldásban rejtve marad, hogyan lehet rátalálni a megfelelő egyenesre. A következő gondolatmenetben erre kapunk választ egy egyszerű számolás eredményeként.

II. megoldás. Húzzunk párhuzamost az adott P ponton keresztül a szögszárakkal; e két párhuzamos és a szög szárai egy c, d oldalú paralelogrammát határoznak meg (ld. *2. ábra*). Minden, a P ponton keresztül húzott egyenes, amely a szögszárakat metszi, e paralelogrammán kívül halad, és a szögtartományból olyan háromszöget vág le, amelynek területe a paralelogramma és az ábrán látható két háromszög területének az összege. A paralelogramma és annak területe az egyenes választásától független, így csak a két háromszög területének összege vizsgálandó. E területösszeg kétszerese (a 2. ábra további jelöléseit is használva): $2T = (xd + yc)\sin\gamma$. A két háromszög hasonló, mivel a párhuzamosságok miatt megfelelő szögeik egyenlőek. Ezért $\dfrac{x}{d} = \dfrac{c}{y}$, azaz $xy = cd$. Így a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $2T = (xd + yc)\sin\gamma \geq 2\sqrt{xd \cdot yc}\sin\gamma = 2cd\sin\gamma$, ami x, y értékétől független állandó. A $2T$ pontosan akkor veszi fel ezt a minimális értéket, ha a becslésben egyenlőség áll, azaz ha $xd = yc$. Ez éppen azt jelenti, hogy a két hasonló háromszög területe egyenlő, vagyis e két háromszög egybevágó, azaz egy-egy megfelelő oldaluk egyenlő – például az a kettő, amelyeknek közös végpontja a P. A minimális helyzetben tehát P felezi az egyenesnek a szögtartományba eső szakaszát.



2. ábra