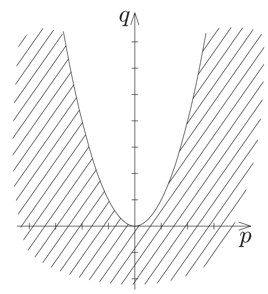
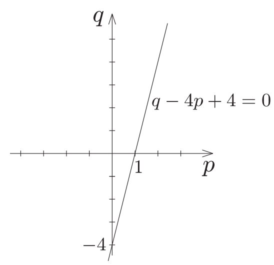
Megoldás. a) A másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van két – különböző – gyöke, ha a diszkriminánsa, $D = 4p^2 - 4q$ pozitív. A $(p; q)$ síkon ez a $q = p^2$ parabola külső pontjaira teljesül. Ez a halmaz látható az *1. ábrán.*



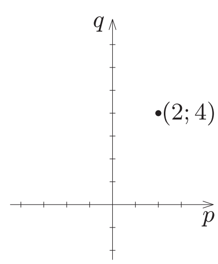
1. ábra

b) Az egyenletnek akkor „gyöke a kettő”, ha x helyére 2-t írva egyenlőséget kapunk: $2^2 - 4p + q = 4 - 4p + q = 0$. A $(p; q)$ síkon ez egy egyenes egyenlete, az egyenes a *2. ábrán* látható.



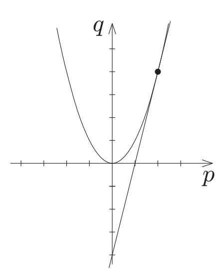
2. ábra

c) Ha az egyenletnek a „kettő az egyetlen gyöke”, akkor a b) részben talált feltétel mellett $(4 - 4p + q = 0)$ a diszkrimináns 0, azaz $q = p^2$. Ebből a $p^2 - 4p + 4 = (p - 2)^2 = 0$ egyenletet kapjuk, ahonnan $p = 2$ és így $q = 4$. A c) feltétel tehát egyetlen számpárra teljesül, ez a $(2; 4)$ (*3. ábra*).



3. ábra

Megjegyzés. Ha a három ponthalmazt egyetlen koordinátarendszerben ábrázoljuk (*4. ábra*), akkor látható, hogy a b) kérdés egyenese a c) kérdés pontjában érinti az a) kérdés ponthalmazát határoló parabolát.



4. ábra