I. megoldás. A feltétel szerint S pozitív, azért S^2 és S minimuma egyszerre létezik, S minimuma S^2 minimumának a négyzetgyöke és a két minimumot a változók ugyanazon értékeire kapjuk. Számoljuk tehát ki S négyzetét:

$$S^2=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2\bigg(\underbrace{\frac{ab}{c}\cdot\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}_{a^2+b^2+c^2=1}\bigg).$$

Rendezzük át a kapott egyenlőséget és csoportosítsuk a jobb oldalon a tagokat:

$$S^2-2=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}\right).$$

A jobb oldal a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint nagyobb vagy egyenlő, mint

$$\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2}\cdot\frac{a^2c^2}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2c^2}{b^2}}=a^2+b^2+c^2=1.$$

Azt kaptuk, hogy $S^2\ge 3$; a bevezetőben mondottak szerint tehát S-nek a megadott feltételek esetén létezik legkisebb értéke és az $\sqrt{3}$. Az is látható, hogy az egyenlőség feltétele az, hogy mindhárom számtani-mértani egyenlőtlenségben az egyenlőség teljesüljön, amire pontosan akkor kerül sor, ha $\dfrac{ab}{c}=\dfrac{ac}{b}=\dfrac{bc}{a}$, azaz $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Megjegyzések. 1. Az olvasó felismerheti a 2005. októberi számunkban ismertetett *Muirhead-tétel* módszerét. A feladat lényegében az

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2$$

egyenlőtlenség igazolása volt. Ennek szimmetrikus változata a Muirhead-tétel szerint igaz, hiszen $(2;2;-2)\succ(2;0;0)$. A feladat állítása ennél élesebb, itt már a ***ciklikus*** permutációk között is fennáll az egyenlőtlenség. Ez azon múlik, hogy a $B(2;0;0)$ pont benne van az $A_1(2;2;-2)$, $A_2(2;-2;2)$, $A_3(-2;2;2)$ pontok konvex burkában: az A_1A_2 szakasz felezőpontja.

2. Másképpen is bebizonyíthatjuk a fenti megoldásban kulcsszerepet játszó

$$Q=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2$$

egyenlőtlenséget. A bal oldal kétszeresében a tagokat alkalmasan csoportosítva

$$\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\right)+\left(\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)=$$

$$=b^2\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+a^2\left(\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)+c^2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right).$$

A jobb oldalon a zárójelekben rendre egy-egy pozitív számnak és a reciprokának az összege áll, amelyről ismeretes, hogy legalább 2. Így $2Q\ge 2(a^2+b^2+c^2)$ és ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Azt fogjuk igazolni, hogy $S\ge\sqrt{3}$. A pozitív nevezőkkel való szorzás után elegendő azt bebizonyítani, hogy $\sqrt{3}abc\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Vezessük be az $x=ab$, $y=bc$, $z=ca$ változókat. Ezekkel az eredeti változók négyzete rendre

$$a^2=\frac{zx}{y},\quad b^2=\frac{xy}{z},\quad c^2=\frac{yz}{x}.$$

A feltétel a nevezőkkel való szorzás után az új változókra nézve azt jelenti, hogy $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=xyz$, a bizonyítandó állítás pedig azt, hogy

$$\sqrt{3xyz}\le x^2+y^2+z^2.$$

Négyzetre emelve

$$3xyz\le x^4+y^4+z^4+2\big(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\big).$$

Az új változókra kapott feltételből helyettesítsük be xyz négyzetösszeg alakját:

$$3x^2y^2+3y^2z^2+3z^2x^2\le x^4+y^4+z^4+2\big(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\big).$$

Rendezve és 2-vel szorozva

$$0\le x^4+y^4-2x^2y^2+y^4+z^4-2y^2z^2+z^4+x^4-2z^2x^2=$$

$$=\big(x^2-y^2\big)^2+\big(y^2-z^2\big)^2+\big(z^2-x^2\big)^2.$$

A végső egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $S\ge\sqrt{3}$. Egyenlőség lehetséges, pontosan akkor, ha $x^2=y^2=z^2$, azaz ha $a^2=b^2=c^2=\dfrac{1}{3}$, vagyis a kifejezés legkisebb lehetséges értéke $\sqrt{3}$.