I. megoldás. Azt állítjuk, hogy $(\underbrace{6\dots6}_{n\text{ jegy}})^2+\underbrace{8\dots8}_{n\text{ jegy}}=\underbrace{4\dots4}_{2n\text{ jegy}}$ minden pozitív egész n-re igaz. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk be.

Tudjuk, hogy $n=1$-re igaz. Tételezzük fel, hogy n jegy esetén fennáll az egyenlőség, vagyis $(\underbrace{6\dots6}_{n\text{ jegy}})^2+\underbrace{8\dots8}_{n\text{ jegy}}=\underbrace{4\dots4}_{2n\text{ jegy}}$. Bizonyítandó, hogy

$$(\underbrace{6\dots6}_{n+1\text{ jegy}})^2+\underbrace{8\dots8}_{n+1\text{ jegy}}=\underbrace{4\dots4}_{2n+2\text{ jegy}}.$$

A bizonyításhoz vezessük be a következő jelöléseket: $a=\underbrace{1\dots1}_{n\text{ jegy}}$, $b=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ jegy}}$. E jelöléseket felhasználva azt kell bizonyítani, hogy ha

(1) $$(6a)^2+8a=4b,$$

akkor

$$\big(6\cdot(10a+1)\big)^2+8(10a+1)=4(100b+11).$$

Kis átalakításokat végezve, majd b helyére az (1)-ből következő $9a^2+2a$ kifejezést írva:

$$\begin{aligned}36\cdot(10a+1)^2+80a+8&=400b+44,\\ 9(100a^2+20a+1)+20a+2&=100b+11,\\ 900a^2+200a+11&=900a^2+200a+11.\end{aligned}$$

Azonossághoz jutottunk, az állítás teljesül $(n+1)$-re is; a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Az állítás két oldalát lépésenként alakítjuk át:

$$\begin{aligned}(\underbrace{6\dots6}_{n\text{ db}})^2+\underbrace{8\dots8}_{n\text{ db}}&=\underbrace{4\dots4}_{2n\text{ db}},\\ (\underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}})^2\cdot36+\underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}\cdot8&=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}}\cdot4,\\ \underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}\cdot4\cdot(\underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}\cdot9+2)&=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}}\cdot4,\\ \underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}\cdot(\underbrace{9\dots9}_{n\text{ db}}+2)&=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}},\\ \underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}\cdot(10^n-1+2)&=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}},\\ \underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}\cdot(10^n+1)&=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}},\\ \underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}\cdot10^n+\underbrace{1\dots1}_{n\text{ db}}&=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}},\\ \underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}}&=\underbrace{1\dots1}_{2n\text{ db}},\end{aligned}$$

ami azonosság, tehát az állítás minden n-re igaz.

III. megoldás. Mivel $\underbrace{k\dots k}_{n\text{ db}}=k\cdot\dfrac{10^n-1}{9}$, az eredeti egyenlőség így írható:

$$\left(\frac{6\cdot(10^n-1)}{9}\right)^2+8\cdot\frac{10^n-1}{9}=4\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}.$$

Mindkét oldalt $\dfrac{4}{9}$-del osztva:

$$\begin{aligned}(10^{2n}-2\cdot10^n+1)+(2\cdot10^n-2)&=10^{2n}-1,\\ 10^{2n}-1&=10^{2n}-1.\end{aligned}$$

Az állítás tehát minden n-re igaz.