I. megoldás. Jelöljük a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló összeget S_n-nel.

Azt állítjuk, hogy S_n nem változik, ha minden tagjának a számlálójában ciklikusan eggyel megnöveljük az indexet:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=$$

$$=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}.$$

A két oldal különbségét képezve és az egyenlő nevezőjű törteket összevonva minden egyes tagban egyszerűsíthetünk:

$$\frac{a_i^2-a_{i+1}^2}{a_i+a_{i+1}}=a_i-a_{i+1}.$$

A két oldal különbsége így teleszkópikus összegként $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_n-a_1)=0$, a fenti azonosságot igazoltuk. A bizonyítandó egyenlőtlenséget ezek után írjuk a

$$2S_n\geq a_1+a_2+\ldots+a_n$$

alakba és a jobb oldalon is „kettőzzük meg” a tagokat:

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\geq\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\ldots+\frac{a_n+a_1}{2}.$$

Vegyük észre végül, hogy ebben az egyenlőtlenségben a bal oldal tagonként nagyobb a jobb oldalnál. Ha x és y pozitív számok, akkor a négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

amiből valóban

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\frac{x+y}{2}$$

következik. Ezzel a feladatot megoldottuk. A bizonyításból kiderül, hogy az egyenlőség feltétele az, hogy valamennyi négyzetes-számtani közép egyenlőtlenségben egyenlőség álljon, ami pedig pontosan akkor teljesül, ha $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$.

II. megoldás. Ha x, y pozitív számok, akkor

$$S(x;y)=\frac{x^2}{x+y}=\frac{x^2+xy}{x+y}-\frac{xy}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y}.$$

A jobb oldalon a különbség második tagja a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség négyzetéből felülről becsülhető:

$$\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4},\quad\text{ahonnan}\quad S(x;y)\geq x-\frac{x+y}{4}=\frac{3x-y}{4}.$$

Ha most az $x=a_i$, $y=a_{i+1}$ helyettesítések után összegezzük az így adódó n darab egyenlőtlenséget, akkor a bal oldalon éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala áll. A jobb oldalon a $3a_i$ alakú számok összegének és az a_i alakú számok összegének a különbségét kell 4-gyel osztani: ez éppen az adott számok összegének a fele, a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldala.