**I. megoldás.** Nem igaz. Mutatunk példát olyan négyszögre, hogy a területének négyzete egyenlő oldalainak szorzatával, de nincs derékszöge.

Tekintsük azt a húrtrapézt, amelynek alapjai 2 és 8, szárai 5 egység hosszúak. (Mivel $5+2+5>8$, ilyen trapéz valóban létezik.)

Könnyen kiszámítható, hogy a szárnak a hosszabbik alapra eső merőleges vetülete $\frac{8-2}{2}=3$ egység hosszú. Az itt keletkező derékszögű háromszög másik befogója a trapéz magassága, melynek hossza így 4 egység. A trapéz területe tehát $T=\frac{8+2}{2}\cdot 4=20$ területegység, $T^2=400$. Az oldalak szorzata $2\cdot 5\cdot 8\cdot 5=400$. A két mennyiség valóban megegyezik, a különböző alapok miatt pedig nyilván nincsenek derékszögei a szimmetrikus trapéznak.

*Megjegyzés.* A feladat megoldásához a fenti ellenpélda nyilván elegendő. Ugyanakkor tárgyalható a probléma némiképpen általánosabban is. Az alábbi megoldás a húrnégyszögek közül keresi meg az összes alkalmasat.

**II. megoldás.** Jelölje a négyszög oldalait $a$, $b$, $c$, $d$, félkerületét $s$. Tegyük fel, hogy a négyszög húrnégyszög, ekkor területére teljesül, hogy

$$T^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

Mivel $s=\frac{a+b+c+d}{2}$, a terület négyzete:

$$T^2=-\frac{1}{16}\cdot(a-b-c-d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d).$$

A feltétel szerint ez az oldalak szorzatával, $abcd$-vel egyenlő. Ezt az egyenlőséget átrendezve, majd szorzattá alakítva:

$$\begin{aligned}
0&=-16abcd-(a-b-c-d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)=\\
&=-16abcd-\big((a-b)^2-(c+d)^2\big)\big((a+b)^2-(c-d)^2\big)=\\
&=-16abcd-\big((a^2+b^2-c^2-d^2)-\\
&\quad-2(ab+cd)\big)\big((a^2+b^2-c^2-d^2)+2(ab+cd)\big)=\\
&=-16abcd-\big((a^2+b^2-c^2-d^2)^2-4(ab+cd)^2\big)=\\
&=4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=\\
&=(2ab-2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab-2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)=\\
&=\big((a+b)^2-(c+d)^2\big)\big((c-d)^2-(a-b)^2\big)=\\
&=-(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).
\end{aligned}$$

A négy szorzótényező közül legalább az egyik 0. Vizsgáljuk az eseteket külön-külön.

*I. eset:* $a+b-c-d=0$, azaz $a+b=c+d$. Szavakban: két-két szomszédos oldal összege egyenlő. Ugyanezt a feltételt kapjuk a negyedik szorzótényező nulla voltának vizsgálatakor. Ilyen feltétel mellett nem kell, hogy derékszöge legyen a húrnégyszögnek. Erre egy példát is mutathatunk: az oldalak legyenek rendre 9, 5, 7, 7 egység hosszúak. Könnyen látható, hogy a fenti feltételek teljesülnek erre a négy oldalra, és tudjuk úgy mozgatni az oldalakat, hogy húrnégyszög legyen a négyszögünkből. Többféleképpen is belátható, hogy ennek a négyszögnek nem lesznek derékszögei. (Ennek meggondolását az Olvasóra bízzuk.)

*II. eset:* $a-b+c-d=0$, azaz $a+c=b+d$, négyszögünk nemcsak húrnégyszög, hanem érintőnégyszög is. Olyan húrtrapéz például, melynek szára $b=\frac{a+c}{2}$, ha $a$ és $c$ az alapok.

*III. eset:* $a+c+b+d=0$. Ez nyilván nem teljesülhet.

Találtunk tehát a húrnégyszögek között többféle ellenpéldát is, így a feladat kérdésére válaszunk nemleges.