Megoldás: Legyen az ABC szabályos háromszög oldala egységnyi, és jelölje a három kör sugarát rendre R_a, R_b, R_c, ahol $R_a \geq R_b \geq R_c$. A háromszögből lefedett rész területe a körök összterületének a hatoda. A legnagyobb kör sugara nem kisebb mint $\frac{1}{2}$, a háromszög oldalának a fele, és nem nagyobb mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a háromszög magassága. R_b és R_c legfeljebb $1 - R_a$, különben a B és az A középpontú, illetve a C és az A középpontú körök metszenék egymást. A lefedett tartományok területe növelhető, ha az R_b és R_c sugarakat $1 - R_a$ értékre növeljük. Ekkor ugyanis a két $1 - R_a$ sugarú kör érinti az A középpontú kört, de nem érintik egymást és a szemközti oldalakat sem, hiszen a sugaruk nem nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Az így együttesen lefedett terület:

$$T = \frac{\pi}{6}(R_a^2 + R_b^2 + R_c^2) = \frac{\pi}{6}\big(R_a^2 + (1 - R_a)^2 + (1 - R_a)^2\big).$$

Négyzetre emelés és rendezés után a következő másodfokú kifejezést kapjuk:

$$T = \frac{\pi}{6}(3R_a^2 - 4R_a + 2).$$

Ez akkor maximális, ha a zárójelben levő kifejezés maximális. Keressük meg azt az R_a értéket az $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ intervallumban, ahol a $3R_a^2 - 4R_a + 2$ értéke a lehető legnagyobb. A szélsőérték helyét a másodfokú kifejezés teljes négyzetté alakításával lehet egyszerűen meghatározni:

$$3\left(R_a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$

Innen leolvasható, hogy a maximumot az $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ zárt intervallum $\frac{2}{3}$-tól távolabbi végpontjában kapjuk. Ez az érték a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a háromszög magassága. A lefedett terület tehát akkor maximális, ha a körök egyike a lehető legnagyobb, érinti a háromszög szemközti oldalát és a másik két kört. A körök sugara ekkor $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Megjegyzés. Fejes Tóth László[1], a magyar diszkrét geometriai iskola megalapítója vizsgálta egybevágó körök legsűrűbb elhelyezését a síkon. Érdekes problémák vetődnek fel a különböző sugarú körök vizsgálatakor. Ehhez kapcsolódik a feladatunkban kapott elrendezés, hiszen ez több elhelyezési probléma optimális megoldásaként is adódik. Ilyen például a két különböző sugarú kör legsűrűbb elhelyezése a síkon. Egy hasonló feladat: tekintsük azt a síkbeli „vízmolekulát”, amelynek két kisebb atomja úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a feladatunkban kapott körök; mekkora lesz ilyen esetben a molekulák legsűrűbb elrendezésének a sűrűsége, és milyen lesz az elrendezés szerkezete?

[1] A közelmúltban elhunyt *Fejes Tóth Lászlóról* szóló megemlékezést ld. lapunk 258. oldalán.