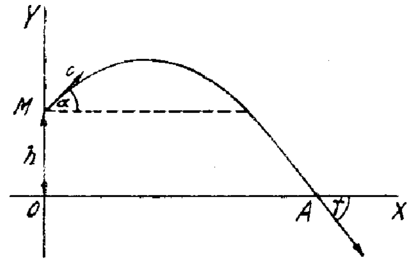
Az elhajított súlygolyó mozgását az

$$x = c\cos\alpha \cdot t, \quad y = c\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 + h$$

egyenletek írják le, ha a derékszögű koordinátarendszert szokásos módon vesszük fel és kezdőpontja az O pont.



A mozgó pont pályájának egyenlete

$$y = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot x - \frac{1}{2}\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}x^2 + h.$$

a) Az A pontra nézve $y = 0$; az OA távolság az

(1) $$x\mathrm{tg}\ \alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}x^2 + h = 0, \text{ ill. a } gx^2 - c^2\sin 2\alpha \cdot x - 2hc^2\cos^2\alpha = 0\ldots$$

egyenletnek gyöke. Ezen egyenletnek mindig valós és ellenkező előjelű gyökei vannak; közülük csak a pozitív felel meg feladatunknak és így

(2) $$\begin{aligned} OA = x &= \frac{1}{2g}(c^2\sin 2\alpha + \sqrt{c^4\sin^2 2\alpha + 8ghc^2\cos^2\alpha}) = \\ &= \frac{c\cos\alpha}{g}(c\sin\alpha + \sqrt{c^2\sin\alpha + 2gh})\ldots \end{aligned}$$

Ha $h = 0$, akkor $x = \dfrac{c^2\sin 2\alpha}{g}$.

b) Hogy ezen kérdésre felelhessünk, indirekt utat választunk[1] nevezetesen keressük, minő hajítási távolságokhoz tartoznak egyáltalában α értékek. Ezen célból az eredeti

$$x\mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{\cos^2\alpha}x^2 + h = 0, \text{ ill. } x\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}\frac{g}{\cos^2\alpha}x^2 - h$$

egyenletben $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ és $x = d$ helyettesítése után mindkét oldalon négyzetre emelünk, $\sin^2\alpha$ helyébe $(1-\cos^2\alpha)$-t írunk és $\cos\alpha$-ra rendezünk. Így keletkezik:

(3) $$4c^4(h^2 + d^2)\cos^4\alpha - 4c^2d^2(gh + c^2)\cos^2\alpha + g^2d^4 = 0\ldots$$

Ezen egyenlet $\cos^2\alpha$-ra nézve másodfokú és ha valósak a gyökei, pozitívek is, mert szorzatuk és összegük pozitív.[2] A 3) gyökei valósak, ha a discriminánsa nem negatív, tehát ha

$$\Delta \equiv 16c^4d^4\left[(gh + c^2) - g^2(h + d^2)\right] = 16c^4d^4(c^4 + 2ghc^2 - g^2d^2) \geq 0.$$

Ennek feltétele:

(4) $$g^2d^2 \leq c^2(c^2 + 2gh) \quad \text{azaz} \quad d \leq \frac{c}{g}\sqrt{c^2 + 2gh}\ldots$$

Eszerint a legnagyobb hajítási távolság:

(5) $$D = \frac{c}{g}\sqrt{c^2 + 2gh}\ldots$$

[1] 2) szerint $x = OA$ az α függvénye és ezen alapon, differenciálással számíthatnánk tovább. E számítás hosszadalmassága miatt választjuk az indirekt utat ezzel közelebb jutunk a következő kérdéshez is.

[2] Még azt is ki kell mutatnunk, hogy a 3) egyenletet kielégítő $\cos^2\alpha$ értéke 1-nél nem nagyobb. Ezt, mint külön feladatot tűzzük ki.

Ehhez tartozó α_m hajítási szögre nézve, ha d helyett D értékét tesszük:

(6) $$\cos^2\alpha_m = \frac{c^2D^2(gh+c^2)}{2c^4(h^2+D^2)} = \frac{c^2+2gh}{2(c^2+gh)} < 1 \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\alpha_m = \frac{c}{\sqrt{c^2+2gh}} \dots$$

Innen:

(7) $$\sqrt{c^2+gh} = c\,\mathrm{cotg}\alpha_m, \quad \text{tehát} \quad D = \frac{c^2}{g}\mathrm{cotg}\alpha_m \dots$$

Ha $h=0$, $\mathrm{tg}\alpha_m = 1$, $\alpha_m = 45^\circ$. Ha $h>0$, $\alpha_m < 45^\circ$.

c) Ha $0<d<D$, akkor d ilyen értékéhez $\cos^2\alpha$-nak két pozitív értéke tartozik α_1 és α_2. Ezekre nézve 3) alapján

(8) $$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = \frac{d^2(gh+c^2)}{c^2(h^2+d^2)} \dots$$

Ha $h=0$, $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$, azaz $\alpha_1+\alpha_2 = 90^\circ$.

d) A mozgó pont pályájának egyenletéből

$$y' = \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{c^2\cos^2\alpha}x.$$

Ha $x = OA = d$,

(9) $$y' = \mathrm{tg}\alpha - \frac{gd}{c^2\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}\varphi \dots$$

ahol φ azon szög, melyet a pályának A pontban húzott érintője alkot az X-tengellyel; φ vagy tompaszög, vagy negatív hegyes szög, úgy hogy $\mathrm{tg}\varphi < 0$.

A γ szög, amellyel a golyó az A ponthoz érkezik, azon szöget jelenti, amelyet az A ponthoz tartozó sebesség képez az X-tengellyel: ez pedig negatív hegyes szög, úgy hogy $\mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\varphi$.

e) $d=D$ esetében:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha_m - \frac{g}{c^2\cos^2\alpha_m}\cdot\frac{c^2}{y}\mathrm{cotg}\alpha_m$$
$$\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha_m = \mathrm{tg}^2\alpha_m - \frac{1}{\cos^2\alpha_m} = \mathrm{tg}^2\alpha_m - \sec^2\alpha_m = -1$$
$$\mathrm{tg}(-\gamma)\mathrm{tg}\alpha_m = 1, \quad \text{tehát} \quad -\gamma+\alpha_m = 90^\circ, \quad \gamma = -(90^\circ - \alpha_m).$$