A) A mozgó pont sebességét a szóbanforgó esetben az energia-tétel alapján fejezhetjük ki. Zérus kezdősebességet tételezve fel, a mozgó pont mozgásenergiája a helyzeti energia csökkenésével egyenlő, azaz

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy_1 - mgy = mg(y_1 - y).$$

Itt $y_1 = \left(\frac{a}{4}\right)^2$ és $y_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$, ha t. i. a sebességet abban a pontban keressük, amelynek koordinátai a tetszőleges $x(< a)$ és $y\left|-\left(\frac{x}{4}\right)^2\right|$. Eszerint

$$v^2 - 2g\left(\frac{a^2 - x^2}{16}\right) = g\left(\frac{a^2 - x^2}{8}\right),\ v = \frac{1}{2}\sqrt{g\left(\frac{a^2 - x^2}{2}\right)}$$

$g = 980$ és $a = 20$ esetében $v = \frac{7}{2}\sqrt{10(400 - x^2)} = \frac{7}{2}\sqrt{4000 - 10x^2}$ cm $\sec^{-1}$.

B) A mozgó pont $x = 0$ helyen éri el legnagyobb sebességét:

$$v_{\max} = \frac{7}{2}\sqrt{10a^2} = \frac{7a}{2}\sqrt{10} = 70\sqrt{10}\text{ cm sec}^{-1} = 221{,}35\text{ cm sec}^{-1}.$$

C) A maximális sebesség fele: $\frac{7a}{4}\sqrt{10}$; ezt oly x helyen éri el, amelyre nézve

$$\frac{7}{2}\sqrt{10(a^2 - x^2)} = \frac{7a}{4}\sqrt{10};\ \text{innen } x = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 17{,}32.$$

A pont ekkor $\quad y = \left(\frac{1}{4}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3a^2}{64} = 18{,}75$ cm

magasságban van. (25 cm magasságból indult!)

D) A lejtő egyenlete: $y : x = \left(\frac{a}{4}\right)^2 : a$ azaz $y = \frac{ax}{16}$.

A sebesség kiszámítására ismét alkalmazzuk az energia tételét. Tetszőleges (x, y) pontban a sebesség legyen w. Így

$$\frac{1}{2}mw^2 = mg(y_1 - y) = mg\left(\frac{a^2}{16} - \frac{ax}{16}\right) = \frac{mga}{16}(a - x).$$

Innen

$$w = \frac{7}{2}\sqrt{10a(a - x).}$$

Hasonlítsuk ezt össze az *A)* alatti v-vel:

$$\frac{w}{v} = \frac{7}{2}\sqrt{10a(a - x)} : \frac{7}{2}\sqrt{10(a^2 - x^2)} = \sqrt{\frac{a}{a + x}} \leq 1$$

hacsak $a - x > 0$, azaz $x < a$. Az $x = a$ esetben $w = v = 0$.

Ha $x = 0$, akkor $w = v = \frac{7a}{2}\sqrt{10}$ ill. $\frac{w}{v} = 1$. (Ismert tétel!)

Eszerint a sebesség értéke a lejtőn minden x értéknél kisebb, mint a parabolán, kivéve a kezdő és véghelyzetet. Ebből következik, hogy a *parabola pályán ér le előbb a parabola csúcsához.*

Jegyzet. A megoldások legnagyobb része az utolsó kérdésre nem ad helyes feleletet. Legszimpatikusabb azon megoldás, melynek szerzője kijelenti, hogy ezzel a kérdéssel nem boldogul.

Természetesen, ha a parabolán való esés idejét akarjuk kiszámítani, akkor ez nem megy. Ugyanis a parabolán való mozgás egyenlőtlenül változó, hiszen a gyorsulás $g\sin\alpha$ ahol α a parabola egyes pontjához húzott érintőnek irányszögét jelenti és ez változó. Az esés idejének kiszámítása oly integrál kiszámításához vezet, amellyel gimnáziumi tanulmányainkban nem találkozunk. Azonban, mint láttuk, erre nincs szükség.

A parabolapálya eleinte meredekebb, mint a szóbanforgó húr, ill. lejtő mindaddig a pontig, ahol a parabola érintője párhuzamos a húrral.

Ezen párhuzamosság az $x = \frac{a}{2}$ pontban áll elő.

Idáig a parabolán való mozgás gyorsulása állandóan nagyobb, mint a lejtőn való mozgásé; $x = \dfrac{a}{2}$ és $x = a$ között a parabolán nagyobb az út, mint $x = 0$ és $x = a$ között.

Ezen körülmény szolgálhat némi útmutatással a megoldásban adott felelethez.

Ezzel kapcsolatban feleleveníthetjük az ú. n. brachistochronpálya problémáját. Két különböző szinten elhelyezett pont, A és B között, minő függőleges síkban képzelt pályán kell esnie a nehézségi erő hatása alatt valamely súlyos pontnak, hogy a lehető legrövidebb idő alatt érjen A-ból B-be? A vizsgálatok kiderítették, hogy ezen pálya a ciklois íve. A cikloist úgy kell képzelnünk, hogy A-ból indul ki (itt van a csúcsa) és oly kör pontja írja le, mely az A-ból kiinduló vízszintesen (alul) gördül.

Ezen problémát először BERNOULLI JÁNOS vetette fel 1696-ban és megoldását közölte 1697-ben (Lipcse, Acta Eruditorum) Egyidejűleg vele közölte fivére, B. JAKAB is az ő megoldását. (Ugyanott.)

Szóval: az egyenes a legrövidebb út, de nem a legrövidebb idejű esés útja.